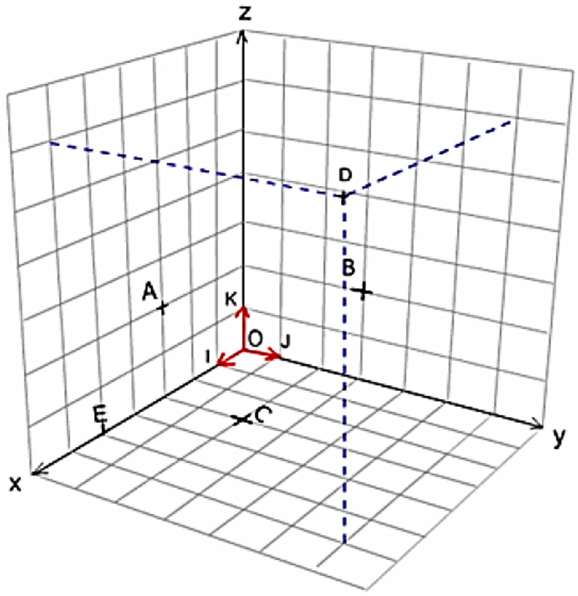
L.Ibn Khaldoun Jammel	******Série 26******	Mr :Afli Ahmed
$4^{ème}$M	Espace	03/2015

❖ Exercice n°1 :



L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{Ok})$.

Dans la figure ci-contre ABCD est un tétraèdre tel que $\overrightarrow{OD}=6\overrightarrow{OI}+6\overrightarrow{OJ}+6\overrightarrow{OK}$

1. a. Préciser les coordonnées de chacun des points A, B, C et E.

b. Vérifier que $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OD}$.

c. En déduire l'aire du triangle ABC.

d. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

2. a. Donner une équation cartésienne du plan P = (ABC) puis vérifier que le point E appartient à P.

b. Soit S l'ensemble des points M(x ,y, z) tels que :

$x^2+y^2+z^2-2x-8y-6z+23=0$.

Montrer que S est une sphère dont on précisera le rayon et les coordonnées de son centre.

c. Montrer que S et P sont tangents en B.

3. Soit f l'application de l'espace dans lui-même qui à tout point M(x, y, z) associe le point M(x', y', z')

tel que : $x'=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$, $y'=\frac{1}{2}y$ et $z'=\frac{1}{2}z$.

a. Montrer que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

b. Montrer que $f(S)$ et P sont tangents en un point dont on précisera les coordonnées.

❖ Exercice n°2 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct

$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points I(1,2 ,3) , B(2 ,1,2) et A(3,0 ;1) et

l'ensembles des points S définie par :

S = {M(x, y, z) et tel que : $x^2+y^2+z^2$ -2x - 4y - 6z + 11 = 0}.

1) Montrer que S est une sphère de centre I et de rayon $\sqrt{3}$.

2) Vérifier que les points A,B et I sont alignés.

3) Soit h l'homothétie de centre I qui transforme A en B.

a) Vérifier que $\frac{1}{2}$ est le rapport de H.

b) Donner l'expression analytique de h.

4)a) Déterminer une équation cartésienne du plan P passant A et perpendiculaire à (AI).

b) Déterminer une équation cartésienne du plan P' = h(P).

c) Vérifier que P' est tangent à S en B.

❖ Exercice n°3 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On considère les points $A(2,0,0)$, $B(0,4,0)$ et $C(0,0,4)$et on désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$.

1) Déterminer le volume du tétraèdre $OABC$.

2) Soit P l'ensemble des points M de l'espace vérifiant$MI = MJ$.

 a)Montrer que Pest le plan d'équation : $2x - 4z + 3 = 0$.

 b) Montrer que la droite (OC) et le plan P sont sécants en un point K que l'on précisera.

3) Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$de l'espace tels que : $x^2+y^2 + z^2 - \frac{3}{2}z - 5 = 0$.

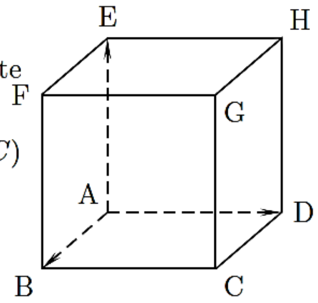
 a) Montrer que S est la sphère de centre$K$ dont on déterminera le rayon.

 b) Vérifier que les points I et J appartiennent à la sphère$S$.

 c) Montrer que S est la seule sphère qui passe par les points I et J et dont le centre est un point de la droite (OC) .

4) Déterminer l'intersection du plan P avec la sphère$S$.

❖ Exercice n°4 :



L'espace est orienté dans le sens direct. ABCDEFGH est un cube d'arête 1 et J est le milieu de [AB].

Le plan $\mathscr{P}$ passant par J et parallèle au plan (ACF) coupe la droite (BC) en K.

Soit h l'homothétie de centre B et qui transforme A en J.

1. Déterminer le rapport de h.
2. (a) Déterminer l'image par h du plan (ACF).

   (b) Déduire que h(C)=K.
3. On muni l'espace du repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

   (a) Calculer $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AF}$ puis déduire qu'une équation cartésienne du plan (ACF) est $x - y - z = 0$.

   (b) Calculer le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre ACFH.

   (c) En déduire le volume $\mathcal{V}'$ du tétraèdre image du tétraèdre ACFH par l'homothétie h.
4. Soit (S) la sphère de centre B et passant par D. Montrer que le plan (ACF) coupe (S) suivant un cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre ω et le rayon r.