Monastir	**Série E1**	Mr :Afli Ahmed
$4^{ème}$M+4Sc.exp	Complexes+Limites-Continuité	08/10/2014 4h

Exercice 1:

Soit f la fonction définie par : f(x) = $\begin{cases} \dfrac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x} \; si\ x < 0 \\ \pi - \dfrac{\sin \pi x}{x} \;;\quad si\ x > 0 \end{cases}$

1) Déterminer le domaine de définition

2) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et donner son prolongement g

3) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, interpréter graphiquement le résultat

4) a/ Montrer que pour tout x > 0 ; $\pi - \dfrac{1}{x} \le f(x) \le \pi + \dfrac{1}{x}$

b/ Déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; interpréter le résultat.

5) On pose pour tout x $\in \left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$; k(x) = tg x et h(x)= fok(x).

a/ Calculer $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x)$

b/ Etudier la continuité de h sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$

c/ Vérifier que pour x $\in \left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$; h(x) = $\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ et retrouver $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x)$

Exercice 2:

Dans la figure ci-contre,on a tracé les courbes (C_f) et (C_g) de deux fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Chacune des deux courbes admet deux asymptotes.

1.Par lecture graphique :

a.Donner $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

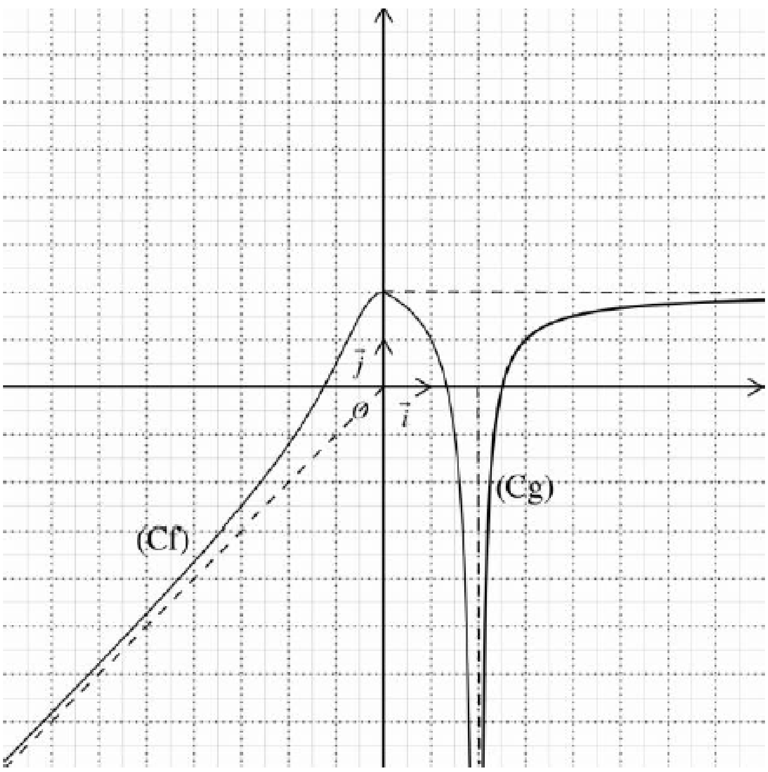
b.Déterminer $g(]2, +\infty[)$ *et* $f(]-\infty, 2[)$.

c.Calculer $\lim\limits_{x \to 2^+} f \circ g(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} f \circ g(x)$.

2.On donne $g\left(\dfrac{5}{2}\right) = 0$

a.Vérifier que $f \circ g$ *est continue sur* $]2, +\infty[$.

b.Montrer que l'équation $f \circ g(x) = \dfrac{3}{2}$ *admet dans* $\left[\dfrac{5}{2}, 3\right]$ *une solution unique.*



WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

➢ Exercice 3:

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-(2+i)z+1+i=0$.
2. On considère l'équation complexe $(E_\theta): z^2-(i+2\cos\theta)z+1+ie^{-i\theta}=0$ avec $\theta\in[0,\pi]$
   a) Vérifier que $e^{-i\theta}$ est une solution de (E_θ).

   b) En déduire l'autre solution de (E_θ).

3. Dans le plan complexe P, rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points $A(e^{-i\theta})$ et $B(i+e^{i\theta})$ avec $\theta\in[0,\pi]$.

   a) Montrer $AB=1+2\sin\theta$.

   b) Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles le triangle AOB est isocèle de sommet principal A.

➢ Exercice 4:

Soient les points A, B et C d'affixes respectives 1, −1 et i. A tout point M d'affixe z on associe le point M'(z') d'affixe z'tels que $z'=\frac{z-1}{z+1}$

1. Montrer que si M ∈ C(O,1)\ {B} alors M' ∈(O,$\vec{v}$)

2. Soit θ ∈]0, π[. On considère l'´equation (E) : $z^2-2e^{i\theta}z+1=0$.

   a. Déterminer les racines carrées de $e^{i\theta}-1$ sous formes exponentielle.

   b. Résoudre alors (E) dans $\mathbb{C}$.

3. Soit M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_1=e^{i\theta}+\sqrt{2sin\theta}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$ et $z_1=e^{i\theta}-\sqrt{2sin\theta}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$

   a. Vérifier que $\text{Im}(z_1)\neq 0$

   b. En déduire que les points A, B et M_1ne sont pas alignés.

   c. Montrer que $\frac{z'_1}{z'_2}=-1$ .En déduire que les points A, B, M_1et M_2sont cocycliques.

   d. Montrer que $e^{i\theta}-i=-2icos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$. En déduire que M_1 appartient à un cercle fixe de centre C dont on précisera le rayon.

➢ Exercice 5:**Répondre par vrai ou faux en justifiant :**

1) z un nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$ et $t=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

   a) t est une racine 4 ^{ième} de l'unité.
   b) Re(z^{10})=-2^9
   c) arg($\frac{z^2}{\bar{t}^3}$) $\equiv\frac{\pi}{12}[2\pi]$

2) Soit A et B deux points tels que : $\frac{z_A}{z_B}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ alors :

   a) O,A et B non alignés .
   b) OAB rectangle en O
   c) OAB équilatéral .

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014