Exercice 1:

On considère les complexes suivants : $z_1=(1-i)(1+2i)$; $z_2=\frac{2+6i}{3-i}$ et $z_3=\frac{4i}{i-1}$.

M_1,M_2 et M_3 désignent leur images respectives dans le plan complexes muni d'un repère $(O,\vec{u},\vec{v})$

1./a- Déterminer la forme algébrique de z_1 ;z_2 et z_3.

b- Placer M_1,M_2 et M_3.

2./ Montrer que $M_1M_2M_3$ est un triangle isocèle et rectangle.

3./ Déterminer le complexe z_4 affixe du point M_4 tel que $M_1M_2M_4M_3$ soit un carré.

4./ Soit $Z'=\frac{z-2+2i}{z-2i}$

a- Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que $|Z'|=1$.

b- Vérifier que M_1 et M_4 sont deux points de cet ensemble.

5./ Soit $z_5=1+i\sqrt{3}$.

a- Déterminer la forme trigonométrique de $z_3.z_5$

b- Déterminer la forme algébrique de $z_3.z_5$

c- En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 2:

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives 1, – 3i et i

A tout point M d'affixe z ($z \neq -3i$), associe le point M′ d'affixe z′ tel que : $z'=\frac{z-1}{3-iz}$

1./ a. Vérifier que, pour tout $z \neq -3i$, $z'=\frac{i(z-1)}{z+3i}$

b. Déterminer l'ensemble des points M tel que $|z'|=1$

2./ Déterminer l'ensemble des points M tel que z′ soit réel.

3./ a. Vérifier que, pour tout $z \neq -3i$, $|z'-i|.|z+3i|=\sqrt{10}$

b. En déduire que si M appartient au cercle de centre B et de rayon 1 alors M′ appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon

Exercice 3:

$(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé du plan P .

Soit A le point d'affixe 1 ; soit B le point d'affixe −1.

Soit f l'application de P privé de O dans P qui à tout point M d'affixe z distinct de O associe le point $M'=f(M)$ d'affixe $z'=\frac{-1}{\bar{z}}$

1.a. Soit E le point d'affixe $e^{i\frac{\pi}{3}}$ .on appelle E' son image par f.

Déterminer l'affixe de E' sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.

b. On noteC1 le cercle de centre O et de rayon 1.Déterminer l'image de C_1 par l'application f .

2. a. Soit K le point d'affixe $2e^{i\frac{\pi}{5}}$ et K' l'image de K par f. Calculer l'affixe de K'

b. Soit C2 le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer l'image de C_2 par l'application f

3. On désigne par R un point d'affixe $1+e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi\,;\pi[$, R appartient au cercle C_3 de centre A et de rayon 1.

a. Montrer que $z' + 1 = \dfrac{\bar{z}-1}{\bar{z}}$

En déduire que : $|z' + 1| = |z'|$

b. Si on considère maintenant les points d'affixe $1+e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi\,;\pi[$,

Montrer que leurs images sont situées sur une droite. On pourra utiliser le résultat du **a.**.

Exercice 4:

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$. Soit f l'application de P-{o} dans P qui à tout point M(z) associe le point M'($z'=\dfrac{z^2-9}{2z}$). On désigne par A(3i) et par B(-3i)

1./a) Déterminer les point invariant par f

b) Montrer que z' est imaginaire pur ⇔ M', A et B sont alignés

c) Montrer que si $z \neq 3i$ alors on a: $\dfrac{z'+3i}{z'-3i} = \left(\dfrac{z+3i}{z-3i}\right)^2$

d) Déduire que $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) \equiv 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})[2\pi]$. En déduire l'ensemble des points M si z' est imaginaire pur

2./Soit $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

a) Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes z1 et z2 affixes respectives des points M_1 et M_2 antécédents de M'($3i\sin\theta$) par f.

b) Montrer que A, B, M_1 et M_2 sont situés sur le même cercle que l'on précisera

c) Préciser la nature du triangle BM_1M_2

Exercice 5:

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormaldirect $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points M_n d'affixes $z_n = \left(\dfrac{1}{2}i\right)^n \left(1+i\sqrt{3}\right)$ où n est un entier naturel.

1. Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n, puis z_n en fonction de z_0 et n. (0,25 + 0,25 point)
Donner z_0, z_1, z_2, z_3 et z_4 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

2. Placer les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 (unité graphique : 4 cm).

3. Déterminer la distance OM_n en fonction de n. (0,5 point)

4.a) Montrer que l'on a $M_nM_{n+1} = \dfrac{\sqrt{5}}{2^n}$ pour tout n entier naturel.

b) On pose $L_n = \sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1}$ (c'est-à-dire $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \ldots + M_nM_{n+1}$).

Déterminer L_n en fonction de n, puis la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$.

5. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_n}\right)$ en fonction de n.

Pour quelles valeurs de n les points O, M_0 et M_n sont-ils alignés ?