SERIE DE REVISION

Proposé par : *M^r* **BAAZOUZI ZOUHAIER**

Section : *MATHS*

Année scolaire : **2013/2014**

Dans ce qui suit, x et y désignent des entiers.

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

a) $x^3 \equiv x \pmod 2$.

b) Si $x \equiv 2 \pmod{14}$ alors $x \equiv 1 \pmod 7$.

c) Si $4x \equiv 10y \pmod 5$ alors $x \equiv 0 \pmod 5$.

d) Si $\begin{cases} x \equiv 4 \pmod 5 \\ y \equiv 5 \pmod 8 \end{cases}$ alors $8x - 5y = 7$.

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

Exercice n°1 : (équation différentielle)

On considère les équations différentielles : $y'+3y=0$ (E_0) et $y'+3y = \sin x$ (E)
1/ Résoudre l'équation (E_0) sur $\mathbb{R}$.
2/ a- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)= a\cos x + b\sin x$
Déterminer un couple de réels (a,b) pour que g soit une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) .
b- Montrer qu'une fonction f est une solution de (E) si et seulement si la fonction $(f - g)$ est une solution de (E_0).
c- En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) .
3/ On se propose de résoudre sur $\mathbb{R}^*_+$ l' équation différentielle
$xy' + (3x+1)y = \sin x$ (E') .
On pose $z = xy$
a- Montrer que si y est une solution de (E') alors z vérifie l'équation (E) .
b- Résoudre l'équation (E') sur $\mathbb{R}_+^*$.
c- Déterminer la solution f de (E') qui admet un prolongement par continuité en 0.

Exercice n°2 : (Arithmétique)

1/ Soit a un entier. Déterminer les restes modulo 11 de a^2 .
En déduire que pour tout entier a , $a^2 \neq -1 \pmod{11}$.
2/ Soient x et y deux entiers naturels tels que : 11 divise (x^2+y^2)
a- On suppose que 11 ne divise pas x.
i) Montrer qu'il existe un entier u tel que $xu \equiv 1 \pmod{11}$
ii) En déduire que 11 divise $(1+y^2u^2)$
b- Montrer que si 11 divise (x^2+y^2) alors 11 divise x et 11 divise y.
3/ Montrer que la seule solution dans $\mathbb{Z}^3$ de l'équation $x^2+y^2 = 11z^2$ est le triplet (0,0,0) .

Exercice n°3 : (géométrie dans l'éspace)

On donne dans l'espace orienté E un cube ABCDEFGH d'arête 1 et tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ soit un base directe. On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [HG].
1/ Montrer que le quadrilatère DIFJ est un losange et calculer son aire.
2/ Soit V le volume de la pyramide EDIFJ.
a- Justifier que $V = \frac{1}{3}|(\overrightarrow{DI} \wedge \overrightarrow{DJ}).\overrightarrow{DE}|$ puis calculer V .
b- En déduire la distance du point E au plan (DIJ).
3/ On rapporte l'espace E au repère $R = (A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.
a- Déterminer une équation de chacun des plans (EDI), (EDJ), (EFI), (EFJ) et DIJ).
b- Soit S la sphère de centre $w(\sqrt{6},2,-1)$ et de rayon R = 2 .
Etudier la position relative de S avec chacun des plans (EDI), (EDJ), (EFI) et (EFJ).
c- Déterminer les homothéties de centre E qui transforment S en une sphère S' tangente au plan (DIJ).

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

d- En déduire qu'il existe une sphère à l'intérieur de la pyramide EDIFJ et tangente à toutes ses faces

Exercice n°4 : (géométrie dans l'éspace)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$,$\vec{k}$).
On donne les points A(0,4,1), B(-2,4,5) et C(1,1,5)
1/ Donner une équation cartésienne du plan P =(ABC)
2/ a- Déterminer l'ensemble Δ des points M tel que la sphère de diamètre [BM] passe par A et C.
b- Vérifier que le point D(0,0,1) appartient à Δ .
c- Donner une équation de la sphère S de diamètre [BD].
3/ Soit I le centre de S.
Calculer le volume V du tétraèdre IABC.
4/ a- Déterminer les homothéties de centre D qui transforment la sphère S en une sphère S' tangente à P.
b- Soit I' le centre de S' .
Exprimer le volume V' du tétraèdre I' ABC en fonction de V puis calculer V' .

Exercice n°5 : (géométrie dans l'espace)

*L'espace est muni d'un repère orthonormé dire***ct .** *On donne les points* A(1,2,3), B(2,5,-1), C(0,2,1) et D(-3,7,3) .
1/ a- Vérifier que A, B et C définissent un plan et que ABCD est un tétraèdre.

b- Déterminer une équation du plan (ABC).

c- Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

2/ Soit le centre de gravité du triangle ABC et soit G le point défini par :On désigne par P le plan passant par G et parallèle au plan (ABC).

a- Déterminer le rapport de l'homothétie h de centre D qui transforme (ABC) en P.

b- Le plan P coupe les droites (DA), (DB) et (DC) respectivement en I, J et K.

c- Montrer que G est le centre de gravité du triangle IJK.

d- Calculer le volume du tétraèdre DIJK.

3/ Soit S la sphère de diamètre [DG_1].

a- Déterminer l'intersection de la sphère S et du plan (ABC).

b- Déterminer les translations de vecteur $\vec{u}$ colinéaire à $\overrightarrow{DG_1}$ qui transforment la sphère S en une sphère S'' tangente à P.

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

Exercice n°6 : (Arithmétique)

1/ Etudier suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de 5^n par 7.
2/ Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = 1+5+5^2+.....+5^n$.
a- Montrer que : $4S_n = 5^{n+1} - 1$
b- Soit a un entier, montrer que : $4S_n \equiv a \pmod 7$ ssi $S_n \equiv 2a \pmod 7$
c- En déduire le reste de la division euclidienne de S_{2010} par 7.
3/ Soit n un entier naturel donné.
On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ les équations (E_0) : $5^n x - S_n y = 0$ et (E) : $5^n x - S_n y = 7$
a- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, S_n et 5^n sont premiers entre eux.
b- Résoudre l'équation(E_0) .
c- Montrer que les solutions de (E) sont les couples (x, y) tels que $x = 35 + kS_n$ et $y = 28 + k5^n$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
4/ Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} 25x - 31y = 7 \\ x \wedge y = 7 \end{cases}$

Exercice n°7 : (équation différentielle)

On considère les équations différentielles : (E_0) : $(1+e^x)y' - y = 0$ et (E) : $(1+e^x)y' - y = e^{2x}$
1/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$.
Montrer que g est une solution sur $\mathbb{R}$ de (E) .
2/ Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si (f – g) est une solution de (E_0).
3/ On pose $z = (1+e^x)y$.
a- Montrer que si y est une solution de (E_0)sur $\mathbb{R}$ alors z est une solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle (E') que l'on précisera.
b-En déduire que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions f définies par :$f(x)=\frac{ke^x+e^{2x}}{1+e^x}$, $k \in \mathbb{R}$.

Exercice n°8 : (probabilité)

Chaque année, deux villages A et B organisent un concours sportif. Les concurrents tirent au sort un moyen de transport puis doivent relier le village A au village B le plus rapidement possible en utilisant ce moyen de transport et un parcours adapté. Pour le tirage, on utilise une urne contenant 4 jetons indiscernables au toucher. Sur un premier jeton figure la lettre V , sur le second la lettre R, sur le troisième la lettre P et sur le dernier la lettre L.

Un concurrent tire au hasard un jeton :
- *s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre V, il effectuera le trajet à vélo,*
- *s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre R, Il effectuera le trajet en roller,*
- *s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre P, il effectuera le trajet à pied,*

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

- *s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisira librement son mode de transport parmi les trois précédents.*

On observe que lorsqu'un concurrent tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisit le vélo dans 70% des cas, il choisit le roller dans 20% des cas el il décide de faire le parcours à pied dans 10% des cas.

1. Construire un arbre pondéré correspondant à la situation.
Pour les questions suivantes, on donnera les résultats arrondis au millième.

2. Calculer la probabilité qu'un concurrent effectue le trajet à vélo.

3. Sachant qu'un concurrent a effectué le trajet à vélo, quelle est la probabilité qu'il ait tiré le jeton sur lequel figure la lettre L ?

4. On admet que les résultats des différentes années sont indépendants les uns des autres.
L'expérience des années précédentes permet de considérer que la probabilité, pour le vainqueur, d'avoir effectué le trajet à vélo est $\frac{2}{3}$.
Calculer la probabilité qu'au cours des six prochaines années l'épreuve soit remportée au moins une fois par un concurrent «non cycliste».

<u>Exercice n°9 : (suite réelle)</u>

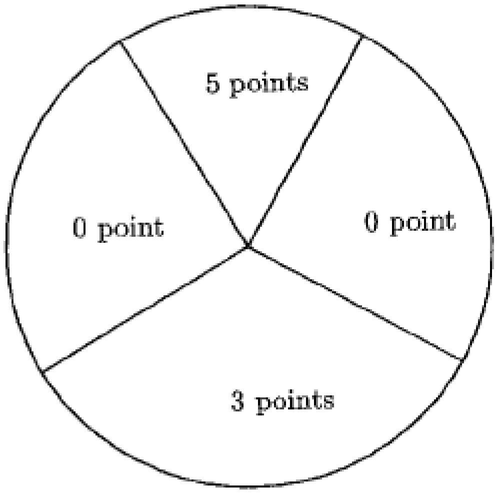
Soit U la suite définie par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n - \ln(U_n^2 + 1) \end{cases}$

I/Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :f(x) = x – ln(*x^2 *+ 1)*
1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation f(x) = x .*
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 1].
En déduire que si x ϵ [0 ; 1] alors f(x) ϵ [0 ; 1].
II/ 1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, U_n *ϵ [0 ; 1].*
2. Étudier le sens de variation de la suite U.
3. Démontrer que la suite U est convergente. Déterminer sa limite.

<u>Exercice n°10 : (probabilité)</u>

Un jeu consiste à lancer des fléchettes sur une cible. La cible est partagée en quatre secteurs, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014
B.Zouhaier



On suppose que les lancers sont indépendants et que le joueur touche la cible à tous les coups.

1. Le joueur lance une fléchette.
On note p_0 la probabilité d'obtenir 0 point.
On note p_3 la probabilité d'obtenir 3 points.
On note p_5 la probabilité d'obtenir 5 points.
On a donc $p_0 + p_3 + p_5 = 1$. Sachant que $p_5 = \frac{1}{2}p_3$ et que $p_5 = \frac{1}{3}p_0$ déterminer les valeurs de p_0 , p_3 et p_5 .

2. Une partie de ce jeu consiste à lancer trois fléchettes au maximum. Le joueur gagne la partie s'il obtient un total (pour les 3 lancers) supérieur ou égal à 8 points. Si au bout de 2 lancers, il a un total supérieur ou égal à 8 points, il ne lance pas la troisième fléchette.
On note G_2 l'évènement : « le joueur gagne la partie en 2 lancers ».
On note G_3 l'évènement : « le joueur gagne la partie en 3 lancers ».
On note P l'évènement : « le joueur perd la partie ».
On note p(A) la probabilité d'un évènement A.

a) Montrer, en utilisant un arbre pondéré, que $p(G_2) = \frac{5}{36}$.

On admettra dans la suite que $p(G_3) = \frac{7}{36}$

b) En déduire p(P).

3. Un joueur joue six parties avec les règles données à la question 2.
Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une partie ?

4. Pour une partie, la mise est fixée à 2 D.
Si le joueur gagne en deux lancers, il reçoit 5 D S'il gagne en trois lancers, il reçoit 3 D. S'il perd, il ne reçoit rien.
On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur pour une partie. Les valeurs possibles pour X sont donc : -2, 1 et 3.

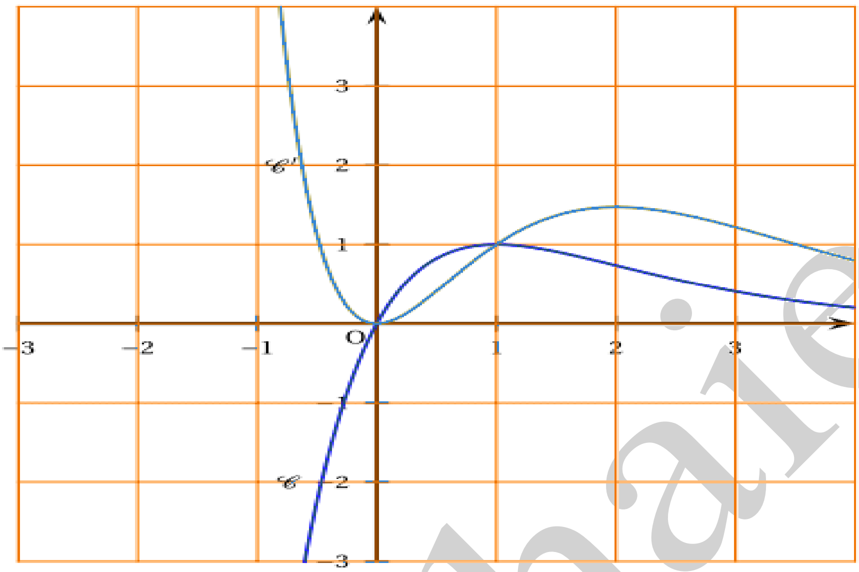
a) Donner la loi de probabilité de X.

b) Déterminer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il favorable au joueur ?

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014
B.Zouhaier

Exercice n°11 : (analyse)

Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ *des nombres réels par :*
$f(x) = xe^{1-x}$ *et* $g(x) = x^2e^{1-x}$
Les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal sont respectivement notées C et C'. leur tracé est donné ci-dessous.



1. a) Déterminer les limites des fonctions f et g en $-\infty$.
b) Justifier le fait que fonctions f et g ont pour limite 0 en $+\infty$.
c) Étudier le sens de variations de chacune des fonctions f et g et dresser leurs tableaux de variations respectifs.

2. On définit l'intégrale I_n *par :* $I_0 = \int_0^1 e^{1-x}dx$ *et , si* $n \geq 1$, $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}dx$
a) Calculer I_0.
b) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que: $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$
c) En déduire la valeur exacte de I_1*, puis celle de* I_2.
3. a) Étudier la position relative des courbes C et C'.
b) On désigne par A l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes C et C', d'autre part entre les droites d'équations respectives x=0 et x+1.
En exprimant A comme différence de deux aires que l'on précisera, démontrer l'égalité : $A = 3 - e$
4. Soit a un réel strictement supérieur à 1.
On désigne par S(a) l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes C et C', d'autre part entre les droites d'équations respectives x = 1 et x = a .
On admet que S(a) s'exprime par : $S(a) = 3 - e^{1-a}(a^2 + a + 1)$.
L'objectif de cette question est de prouver qu'il existe une et une seule valeur de a pour laquelle les aires A et S(a) sont égales.
a) Démontrer que l'équation S(a) = A est équivalente à l'équation : $e^a = a^2 + a+1$.
b) Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou

B.Zouhaier

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Conclure, quant à l'existence et l'unicité du réel a, solution du problème posé.

Exercice n°12 : (probabilié)

Un magasin vend des moteurs électriques tous identiques. Une étude statistique du service après-vente a permis d'établir que la probabilité qu'un moteur tombe en panne pendant la première année d'utilisation est égale à 0,12.

I*/Une entreprise achète 20 moteurs électriques dans ce magasin.*
On admet que le nombre de moteurs vendus dans ce magasin est suffisamment important pour que l'achat de 20 moteurs soit assimilé à 20 tirages indépendants avec remise.

1. Quelle est la probabilité que deux moteurs exactement tombent en panne durant la première année d'utilisation ?

2. Quelle est la probabilité qu'au moins un des moteurs tombe en panne au cours de la première année d'utilisation ?

II*/On admet que la durée de vie sans panne, exprimée en années, de chaque moteur est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ, est un réel strictement positif.*
On rappelle que pour tout réel positif t, $p(Y \leq t) = \int_0^t \lambda\, e^{-\lambda x} dx$.

Dans les questions 1., 2., 3., les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

1. Exprimer $p(Y \leq 1)$ *en fonction de λ. En déduire la valeur de λ.*
Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0{,}128$.

2. Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 3 ans ?

3. Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 4 ans sachant qu'il a duré plus d'un an ?

4. On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces moteurs est égale à $\lim_{t \to +\infty} F(t)$ *où F est la fonction définie sur l'intervalle [0 ; +∞[par :* $F(t) = \int_0^t \lambda\, x e^{-\lambda x} dx$.

a) Calculer F(t) en fonction de t.
b) En déduire la valeur de d_m. On arrondira à 10^{-1}.

Exercice n°13 : (complexe et arithmétique)

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

B.Zouhaier

Le plan est muni d'un repère orthonormé .
On note A et B les points de coordonnées respectives (1 ; 0) et (6 ; 1).
Pour tout point M de coordonnées (x ;y), on note M' l'image du point M par la symétrie orthogonale d'axe (AB) et (x' ;y') ses coordonnées.

1. a) Justifier l'existence de deux nombres complexes a et b tels que, pour tout point M d'affixe z, l'affixe z' du point M' est donnée par $z'=a\overline{z}+b$.

b) En utilisant les points A et B, démontrer que $\begin{cases} 1 = a+b \\ 6+i = a(6-i)+b \end{cases}$

c) En déduire que, pour tout nombre complexe z : $z' = \frac{1}{13}(12+5i)\bar{z} + \frac{1}{13}(1-5i)$

d) Établir que, pour tout point M de coordonnées (x ;y), les coordonnées (x' ;y') du point M' sont telles que : $x'=\frac{1}{13}(12x+5y+1)$ *et* $y'=\frac{1}{13}(5x-12y-5)$

2. On désigne par E l'ensemble des points M dont les coordonnées (x ;y) sont des entiers relatifs et tels que le point M' associé appartienne à l'axe des abscisses.
a) Justifier que M(x ;y) appartient à E si et seulement si $5(x-1)=12y$.
b) En déduire que E est l'ensemble des points de coordonnées (1+12k ;5k) où k est un entier relatif.

3. Dans cette question, on suppose que les coordonnées de M sont des entiers relatifs et que l'abscisse de M' est un entier relatif.
a) Démontrer que $x \equiv 5y+1\ [13]$.
b) En déduire que $5x-12y-5 \equiv 0[13]$ *et que l'ordonnée de M' est un entier relatif.*

4. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Déterminer les points M de la droite d'équation x = 2 tels que les coordonnées du point M' soient des entiers relatifs.
On pourra montrer que l'ordonnée y d'un tel point est un entier relatif et utiliser des congruences modulo 13

Exercice n°14 : (probabilité)

Les trois questions peuvent être traitées de façon indépendante

Un candidat participe à un jeu télévisé qui comporte deux épreuves. La première consiste à répondre à une question tirée au hasard parmi celles que l'assistante a prélevées dans une urne.
Dans la seconde, il doit répondre à une série de 10 questions sur un thème qu'il choisit.

1. L'urne contient dix bulletins indiscernables au toucher comportant chacun une question.

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

Toutes les questions sont différentes, quatre portent sur l'histoire, quatre portent sur la littérature et deux sur le sport.
En début d'émission, l'assistante tire au hasard et simultanément 4 bulletins de l'urne.
On note A l'évènement «les quatre questions portent sur l'histoire» et B l'évènement «l'une au moins des quatre questions porte sur le sport».
Déterminer la probabilité des évènements A et B.

2. L'animateur annonce les thèmes sur lesquels portent les questions des quatre bulletins choisis par l'assistante. Il y a une question d'histoire, deux de littérature et une sur le sport.
Le candidat tire au hasard l'un de ces quatre bulletins.
On admet que la probabilité que sa réponse soit correcte est 0,7 s'il s'agit d'une question d'histoire, 0,6 s'il s'agit d'une question de littérature et 0,5 pour une question sur le sport.
On considère les évènements suivants :

- *H : «la question posée au candidat porte sur l'histoire»*
- *L : «la question posée au candidat porte sur la littérature»*
- *S : «la question posée au candidat porte sur le sport»*
- *C : «le candidat répond correctement à la question posée»*

a) Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à cette première épreuve.
b) Calculer la probabilité de l'évènement C.
c) Sachant que le candidat a répondu correctement, quelle est la probabilité que la question posée ait porté sur le sport ?

3. Le candidat a réussi cette première épreuve et choisit l'histoire comme thème pour la seconde épreuve. Les dix questions qu'on lui pose sont indépendantes et on suppose toujours que la probabilité qu'il réponde correctement à chaque question est égale à 0,7.
On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de bonnes réponses données par le candidat.
a) Soit k un entier compris entre 0 et 10. Quelle est l'expression de la probabilité de l'évènement(X=k) en fonction de k ? On justifiera la réponse.
b) Déterminer la probabilité que le candidat donne au moins neuf bonnes réponses. On arrondira le résultat à 10^{-2}.

<u>Exercice n°15 : (probabilité)</u>

Une entreprise est spécialisée dans la fabrication en série d'un appareil donné.
Un contrôle de qualité a montré que chaque appareil pouvait présenter deux types de défauts :
un défaut de soudure avec une probabilité de 0,03 et un défaut sur un composant électronique avec une probabilité de 0,02 ; le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants.
Un appareil est dit défectueux s'il présente au moins l'un de ces deux défauts.

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

1/ Montrer que la probabilité qu'un appareil fabriqué par cette entreprise soit défectueux est 0,0494.
2/ Une grande surface commerciale reçoit un lot de 10000 appareils fabriqués par cette entreprise.
Déterminer la moyenne et l'écart type de la distribution des appareils défectueux dans ce lot.
3/ Un petit commerçant passe une commande de n appareils à cette entreprise.
a) Pour $n = 25$, calculer à 10^{-3} près la probabilité pour qu'il y ait au plus 2 appareils défectueux dans sa commande.
b) Ce commerçant souhaite que dans sa commande, la probabilité d'avoir au moins un appareil défectueux soit inférieure à 0,5. Déterminer la valeur maximale du nombre n des appareils de sa commande.
4/ La durée de vie exprimée en jours d'un appareil fabriqué par cette entreprise suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0007$.

a) Calculer à 10^{-3} près la probabilité pour qu'un appareil ait une durée de vie comprise entre 700 et 1000 jours.
b) Sachant qu'un appareil n'est pas tombé en panne durant les 700 premiers jours, quelle est la probabilité pour qu'il ne tombe pas en panne avant 1000 jours ?

Exercice n°16 : (conique)

On donne dans le plan une droite D est un point A n'appartenant pas à D et tel que d(A,D) =1.
1/ Soit F le foyer d'une parabole (P) de directrice D et passant par A.
a) Montrer que l'ensemble des points F est un cercle privé d'un point que l'on précisera.
b) On rapporte le plan à un repère orthonormé $R = (A,\vec{i},\vec{j})$ dans lequel la droite D a pour équation : $x = -1$.
Soit S le sommet d'une parabole (P) de directrice D et passant par A. Exprimer les coordonnées de S à l'aide de celles du foyer F de (P).
En déduire que l'ensemble des points S est une ellipse (E) privée d'un point. Donner les éléments géométriques de (E).
2/ Soit (Γ) la parabole de sommet A et de directrice D et soit F son foyer.
a) Justifier qu'une équation de (Γ) est : $Y^2 = 4X$.
b) Soit $M(a,b)$ un point du plan.
Montrer que si $b^2 > 4a$ alors on peut mener de M deux tangentes T_1 et T_2 à (Γ).
c) Soient N_1 et N_2 les points de contact respectifs de T_1 et T_2 avec (Γ).
Montrer que les droites (FN_1) et (FN_2) sont perpendiculaires lorsque M appartient à la courbe
(H) d'équation : $X^2 - Y^2 + 6X + 1 = 0$.
d) Donner la nature et les éléments géométriques de (H).

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

e) Tracer les courbes (Γ) et (H).

Exercice n°17 : (probabilité)

Les parties A et B sont indépendantes

Un site internet propose des jeux en ligne.

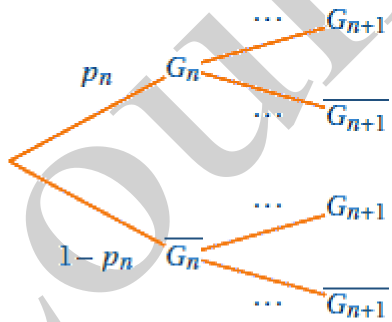
Partie A :

Pour un premier jeu :

- *si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à $\frac{2}{5}$.*
- *si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à $\frac{4}{5}$.*

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par G_n l'évènement «l'internaute gagne la $n^{ème}$ partie» et on note p_n la probabilité de l'évènement G_n.
L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$.

3. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $U_n = p_n - \frac{1}{4}$.

a) Montrer que U est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme U_1 à préciser.

b) Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$.

c) Déterminer la limite de p_n.

Partie B :

Dans un second jeu, le joueur doit effectuer 10 parties.
On suppose que toutes les parties sont indépendantes.
La probabilité de gagner chaque partie est égale à $\overline{4}$.

B.Zouhaier

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

1. a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.

b) Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie ? Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près.

c) Déterminer l'espérance de X.

2. Le joueur doit payer 30 D pour jouer les 10 parties. Chaque partie gagnée lui rapporte 8 D.

a) Expliquer pourquoi ce jeu est désavantageux pour le joueur.

b) Calculer la probabilité pour un joueur de réaliser un bénéfice supérieur à 40 D ? Le résultat sera arrondi à 10^{-5} près

Exercice n°18 :(probabilité)

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. À chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros.
On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.

Les trois questions de l'exercice sont indépendantes.

1. Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.

a) Démontrer que : $P(X=-1)=\frac{20n}{(n+10)(n+9)}$

b) Calculer, en fonction de n la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par la variable X.

c) Vérifier que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X vaut : $E(X)=\frac{-6n^2-14n+360}{(n+10)(n+9)}$

c) *Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'espérance mathématique est strictement positive.*

2. Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne. Les tirages sont indépendants. Déterminer la valeur minimale de l'entier n afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieure à 0,999.

3. On suppose que n=1000 . L'urne contient donc 10 boules blanches et 1 000 boules rouges.
Le joueur ne sait pas que le jeu lui est complètement défavorable et décide

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

d' effectuer plusieurs tirages sans remise jusqu'à obtenir une boule blanche. Le nombre de boules blanches étant faible devant celui des boules rouges, on admet que l'on peut modéliser le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche par une variable aléatoire Z suivant la loi :

pour tout $k \epsilon\ p(Z \leq k) = \int_0^k 0.01e^{-0.01x}dx$

On répondra donc aux questions suivantes à l'aide de ce modèle.

a) Calculer la probabilité que le joueur ait besoin de tirer au plus 50 boules pour avoir une boule blanche, soit $P(Z \leq 50)$.

b) Calculer la probabilité conditionnelle de l'évènement : «le joueur a tiré au maximum 60 boules pour tirer une boule blanche» sachant l'évènement «le joueur a tiré plus de 50 boules pour tirer une boule blanche ».

Exercice n°19 : (équation différentielle)

On considère l'équation différentielle (E) : $y'+y = e^{-x}$.

1. Montrer que la fonction U définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ *par* $U(x) = xe^{-x}$ *est une solution de l'équation différentielle (E).*

2. On considère l'équation différentielle (E') : $y'+y = 0$ *. Résoudre l'équation différentielle (E').*

3. Soit V une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$*. Montrer que la fonction V est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction* $V - U$ *est solution de l'équation différentielle (E').*

4. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

5. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

Exercice n°20 : (probabilité)

Partie I

On dispose d'un dé cubique A parfaitement équilibré possédant une face verte, deux faces noires et trois faces rouges.

Un jeu consiste à lancer deux fois de suite et de manière indépendante ce dé. On note à chaque lancer la couleur de la face obtenue.

1. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient noires.

2. Soit l'événement C : « à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues sont de la même couleur ».

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

Démontrer que la probabilité de l'événement C est égale à $\frac{7}{18}$.

3. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes.

4. À l'issue d'un jeu, sachant que les deux faces obtenues sont de la même couleur, quelle est la probabilité pour que les deux faces obtenues soient vertes ?

Partie II

On dispose d'un second dé cubique B équilibré présentant quatre faces vertes et deux faces noires. Le nouveau jeu se déroule de la manière suivante : on lance le dé B ;

- *si la face obtenue est verte, on lance à nouveau le dé B et on note la couleur de la face obtenue ;*
- *si la face obtenue est noire, on lance le dé A et on note la couleur de la face obtenue.*

1. a) Construire un arbre de probabilités traduisant cette situation.

b) Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer, sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer ?

2. Montrer que la probabilité d'obtenir deux faces vertes est égale à $\frac{4}{9}$.

3. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer ?

<u>Exercice n°21 : (equation différentielle)</u>

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions f, définies et dérivables sur l'intervalle$[0\,;+\infty[$, vérifiant la condition ;

(E) : pout tout réel $x > 0$, $xf'(x) - f(x) = x^2e^{2x}$

1. Montrer que si f, définie et dérivable sur l'intervalle$[0\,;+\infty[$, vérifie la condition (E), alors la fonction g définie sur l'intervalle$[0\,;+\infty[$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ vérifie : pour tout réel $x > 0, g(x) = e^{2x}$

2. En déduire l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'intervalle$[0\,;+\infty[$ qui vérifient la condition (E).

3. Quelle est la fonction définie et dérivable sur l'intervalle$[0\,;+\infty[$ qui vérifie la condition (E) et qui s'annule en $\frac{1}{2}$?

Partie B

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

On considère la fonction h définie sur l'intervalle [0 ;+∞[par $h(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{e}{2}x$.
On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel positif x, le signe de h(x).

2. a) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}dx$ et en déduire. $\int_0^{\frac{1}{2}} h(x)dx$

b) En déduire, en unité d'aire, la valeur exacte de l'aire de la partie du plan située en dessous de l'axe des abscisses et au dessus de la courbe C.

Exercice n °22 : (arithmétique)

On considère l'équation (E): $11x - 7y = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.

a) Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs (u ; v) tels que $11u - 7v = 1$. Trouver un tel couple.

b) En déduire une solution particulière de l'équation (E).

c) Résoudre l'équation (E).

d) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O , \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, on considère la droite D d'équation cartésienne $11x - 7y - 5 = 0$. On note C l'ensemble des points M(x ;y) du plan tels que $0 \leq x \leq 50$ et $0 \leq y \leq 50$.
Déterminer le nombre de points de la droite D appartenant à l'ensemble C et dont les coordonnées sont des nombres entiers.

2. On considère l'équation (F) : $11x^2 - 7y^2 = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.

a) Démontrer que si le couple (x ;y) est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2 (\text{mod } 5)$.

b) Soient xet y des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants:

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5,x^2 est congru à					

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, y^2 est congru à					

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2y^2$ par 5 ?

c) En déduire que si le couple (x ;y) est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.

3. Démontrer que si x et y sont des multiples de 5, alors le couple (x ;y) n'est pas solution de (F). Que peut-on en déduire pour l'équation (F) ?

Exercice n°23 : (analyse)

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

I/On note f la fonction définie sur l'intervalle]0 ;+∞[par $f(x)=\frac{1}{x^2}\ e^{\frac{1}{x}}$.

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O\ ;\vec{\imath}\ ;\vec{\jmath})$ *. L'unité graphique est 1 cm.*

1. *a) Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0.*
   b) Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers +∞.
   c) Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux résultats, pour la courbe C?

2. *a) Démontrer que la fonction dérivée de la fonction f s'exprime, pour tout réel x strictement positif, par :* $f'(x)=-\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}(2x+1)$.
   b) Déterminer le signe de f' et en déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle]0 ;+∞[.
   c) Démontrer que l'équation f(x) = 2 a une unique solution notée α appartenant à l'intervalle]0 ;+∞[et donner la valeur approchée de α arrondie au centième.

3. *Tracer la courbe C dans le repère orthonormé* $(O\ ;\vec{\imath}\ ;\vec{\jmath})$.

II/Pour tout entier naturel $n\geq 2$, *on considère l'intégrale* I_n *définie par :*

$I_n=\int_1^2 \frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}}dx$.

1. *Calculer* I_2.

2. *a) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel* $n\geq 2$: $\quad I_{n+1}=e-\frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}}+(1-n)I_n$.
   b) Calculer I_3 .

3. *a) Établir que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [1 ;2], on a :* $0\leq \frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}}\leq \frac{e}{x^n}$.
   b) En déduire un encadrement de I_n *puis étudier la limite éventuelle de la suite I.*

<u>Exercice n°24 : (arithmétique)</u>

I/*On considère l'équation (E) :7x – 6y = 1 où x et y sont des entiers naturels.*

1. *Donner une solution particulière de l'équation (E)*

2. *Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).*

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

II/*Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples (n, m) d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation :*$7^n - 3 \times 2^m = 1$ *(F).*

1. On suppose $m \leq 4$.
Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.

2. On suppose maintenant que $m \geq 5$.

a) Montrer que si le couple(n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1 (mod 32)$.

b) En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple (n,m) vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.

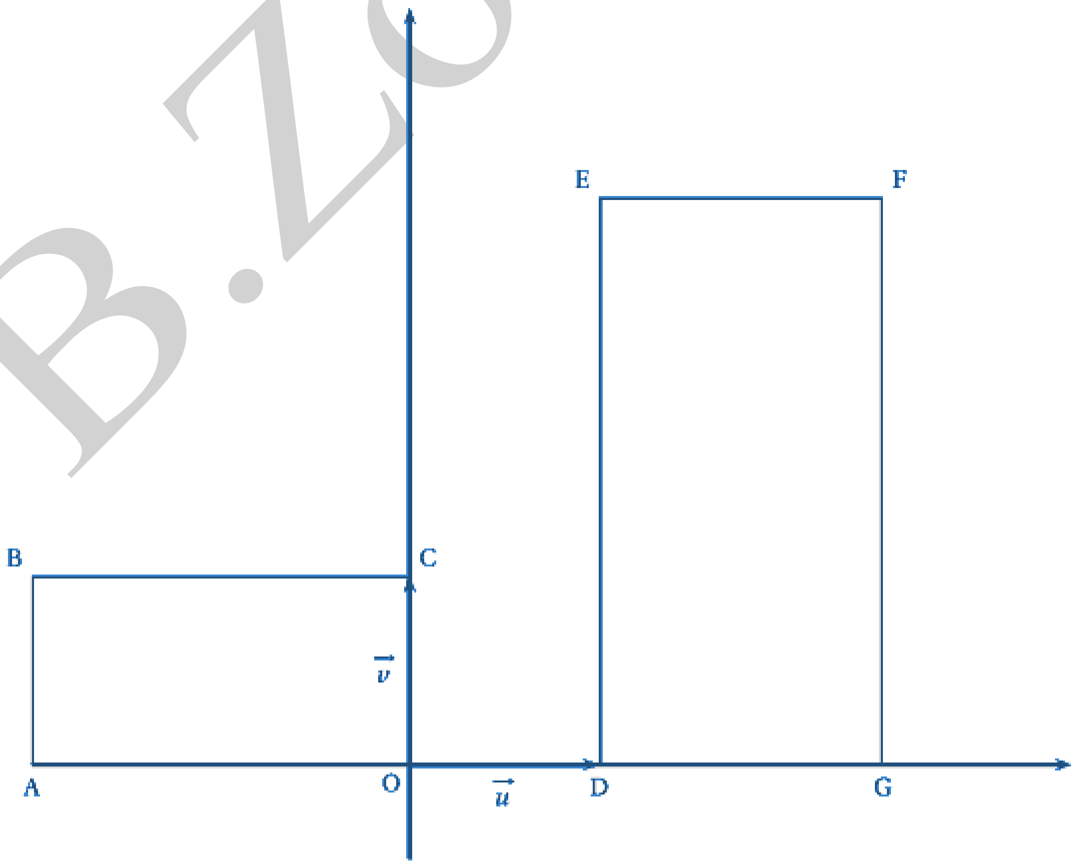
c) En déduire que si le couple (n,m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1 (mod 5)$.

d) Pour $m \geq 5$ *, existe-t-il des couples (n,m) d'entiers naturels vérifiant la relation (F) ?*

3. Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).

Exercice n°25 : (similitude)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u}, \vec{v})$ *on considère les deux rectangles OABC et DEFG où les points A, B, C, D, E, F, G ont pour affixes respectives .*
Voir la figure donnée en annexe.



WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

1. On considère la similitude directe S transformant O en D et A en E.

a) Justifier que l'écriture complexe de la similitude S est: $z' = -\frac{3}{2}iz + 1$.

b) Déterminer l'angle et le rapport de la similitude S .

c) Quelle est l'image du rectangle OABC par la similitude S?

2. On considère la similitude indirecte S' d'écriture complexe $z' = -\frac{2}{3}i\bar{z} + \frac{5}{3}i$.

a) Déterminer l'image du rectangle DEFG par la similitude S'.

b) On considère la similitude g = S'oS.

Déterminer l'image du rectangle OABC par la similitude g.

c) Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

La similitude g a-t-elle des points fixes ? Que peut-on en conclure pour g?

Exercice n°26 : (arithmétique)

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, *on pose* $A(n) = n^4 + 1$.

L'objet de l'exercice est l'étude des diviseurs premiers de A(n).

1. a) Étudier la parité de l'entier A(n).

b) Montrer que, quel que soit l'entier n, A(n)n'est pas un multiple de 3.

c) Montrer que tout entier d diviseur de A(n) est premier avec n.

d) Montrer que, pour tout entier d diviseur de A(n): $n^8 \equiv 1 \pmod{d}$

2. Soit d un diviseur de A(n). On note S le plus petit des entiers naturels non nuls k tels que $n^k \equiv 1 \pmod{d}$.

a) Soit k un tel entier. En utilisant la division euclidienne de k par S, montrer que S divise k.

b) En déduire que S est un diviseur de 8.

c) Montrer que si, de plus, d est premier, alors S est un diviseur de d - 1. On pourra utiliser le petit théorème de Fermat.

3. Recherche des diviseurs premiers de A(n) dans le cas où n est un entier pair.

Soit p un diviseur premier de A(n). En examinant successivement les cas S = 1, S = 2 puis S = 4, conclure que $p \equiv 1 \pmod{8}$.

4. Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Appliquer ce qui précède à la recherche des diviseurs premiers de A(12).

Indication : la liste des nombres premiers congrus à 1 modulo 8 débute par 17, 41, 73, 89, 97, 113, 137, ...

Exercice n°27 : (analyse)

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

Soit f une fonction définie pour tout nombre réel x par : $f(x) = (1 + x)\,e^{-x}$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm.

1. a) Étudier le signe de f(x) sur $\mathbb{R}$.
b) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
c) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$
Calculer, pour tout nombre réel x , f'(x).
En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$
d) Tracer la courbe représentative de la fonction f sur J'intervalle [-2 ; 5].

2. On note I la suite définie pour tout entier naturel n par : $\int_{-1}^{n} f(x)dx$.
Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.
a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n \geq 0$.
b) Montrer que la suite I est croissante.

3. a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que,
pour tous réels a et b: $\int_a^b f(x)dx = (-2-b)e^{-b} + (2+a)e^{-a}$.

b) En déduire l'expression de I_n en fonction de n.
c) Déterminer : $\lim_{n\to+\infty} I_n$.
d) Donner une interprétation graphique de cette limite.

4. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\int_{-1}^{\alpha} f(x)dx = e$.
Ce calcul intégral correspond-il à un calcul d'aire ?

<u>Exercice n°28 : (arithmétique)</u>

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

Soit n un entier naturel non nul.

1. On considère l'équation notée (E) : $3x + 7y = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs.

a) Déterminer un couple (u ;v) d'entiers relatifs tels que 3u + 7v = 1 .
En déduire une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ de l'équation (E).
b) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs (x ;y)solutions de (E).

2. On considère l'équation notée (G) : $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs.

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014
B.Zouhaier

a) Montrer que $100 \equiv 2 \pmod 7$.

Démontrer que si $(x\ ;\ y)$ est solution de (G) alors $3x^2 \equiv 2^n \pmod 7$.

b) Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7.							

c) Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.

En déduire que l'équation (G) n'admet pas de solution.

Exercice n °29 : (analyse)

On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ +\infty[$.

On donne le tableau de ses variations :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1+e^{-2}$	$\searrow$	1

Soit g la fonction définie sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \int_0^x f(t)dt$.

I/1. En tenant compte de toutes les informations contenues dans le tableau de variation, tracer une courbe (C_f) dans le plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).

2. a) Interpréter graphiquement g(2).

b) Montrer que $0 \leq g(2) \leq 2{,}5$.

3. a) Soit x un réel supérieur à 2.

Montrer que $\int_2^x f(t)dt \geq x-2$. En déduire que $g(x) \geq x - 2$.

b) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

4. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ +\infty[$.

II/On admet que pour tout réel t, $f(t) = (t-1)e^{-t} + 1$.

1. A l'aide d'une intégration par parties,

exprimer en fonction du réel x l'intégrale $\int_0^x (t-1)e^{-t}dt$.

B.Zouhaier

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

2. En déduire que pour tout réel x ,$g(x) = x(1 - e^{-x})$.

3. Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.

Exercice n°30 : (complexe, similitude, arithmétique)

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\vec{u};\ \vec{v})$.
Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2+i$, $z_B = 5 + 2i$ et $z_C = i$.
S_1 désigne la symétrie d'axe (AB).

a) Démontrer que S_1 transforme tout point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' telle que $z' = (\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i)\bar{z}+(-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i)$

b) En déduire l'affixe de C', symétrique de C par rapport à (AB).

c) Démontrer que l'ensemble des points M tels que z' est imaginaire pur est la droite D d'équation $4x + 3y = 1$.

d) Vérifier que le point C' appartient à D.

2. a) Démontrer que les droites D et (AB) sont sécantes en un point Ω dont on précisera l'affixe ω.

b) On désigne par S_2 la symétrie d'axe D et par f la transformation définie par $f=S_2 \circ S_1$. Justifier que f est une similitude directe et préciser son rapport.

c) Déterminer les images des points C et Ω par la transformation f.

d) Justifier que f est une rotation dont on donnera le centre.

3. Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.

a) Déterminer les couples d'entiers relatifs (x,y)solutions de l'équation : $4x + 3y = 1$

b) Déterminer les points de D à coordonnées entières dont la distance au point O est inférieure à 9.

Exercice n°31 : (complexe, similitude et arithmétique)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal .
On fera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 3 + 5i$, $b = -4 + 2i$ et $c = 1 + 4i$.

Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = (2 - 2i)z + 1$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

2. a) Déterminer l'affixe du point B' image du point B par f.
b) Montrer que les droites (CB') et (CA) sont orthogonales.

3. Soit M le point d'affixe z = x+ iy, où on suppose que x et y sont des entiers relatifs. Soit M' l'image de M par f.
Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ *et* $\overrightarrow{CA}$ *sont orthogonaux si et seulement si x+3y=2.*

4. On considère (E) : x+3y = 2 , où x et y sont des entiers relatifs.
a) Vérifier que le couple (-4 ; 2) est une solution de (E).
b) Résoudre l'équation (E).
c) En déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle [-5 ; 5] et tels que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ *et* $\overrightarrow{CA}$ *soient orthogonaux.*
Placer ces points sur la figure.

Exercice n°32 : (arithmétique)

I/1. Enoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.
2. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

II/Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ *le système (S)* $\begin{cases} n \equiv 13(19) \\ n \equiv 6(12) \end{cases}$

1. Démontrer qu'il existe un couple (u ;v)d'entiers relatifs tel que :19u+12v = 1 .
(On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).
Vérifier que, pour un tel couple, le nombre N = 13× 12v + 6 ×19u est une solution de (S).

2. a) Soit n_0 *solution de (S), vérifier que le système (S)équivaut à* $\begin{cases} n \equiv n_0(19) \\ n \equiv n_0(12) \end{cases}$

b) Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0(19) \\ n \equiv n_0(12) \end{cases}$ *équivaut à n≡* n_0*(12× 19)*

3. a) Trouver un couple (u,v) solution de l'équation 19u + 12v = 1et calculer la valeur de N correspondante.
b) Déterminer l'ensemble des solutions de (S)(on pourra utiliser la question 2. b)).

4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.
On divise n par 228 = 12 × 19. Quel est le reste r de cette division ?

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014
B.Zouhaier

Exercice n°33 : (suite et arithmétique)

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par $\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \end{cases}$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n$ (modulo 4).
En déduire que pour tout entier naturel k, $u_{2k} \equiv 2$ (modulo 4) et $u_{2k+1} \equiv 0$ (modulo 4).

3. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.
   b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 28$ (modulo 100).

4. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.

5. Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant.
Préciser sa valeur.

Exercice n°34 : (analyse)

Soit la fonction f définie sur I =]0, 4[par f(x) =$\frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}}$

1. a) Dresser le tableau de variation de f.
   b) Vérifier que le point A(2, 0) est un centre de symétrie pour C_f et donner une équation de
la tangente T `a C_f en A.
   c) Construire T et C_f .
2. a) Montrer que f réalise une bijection de I dans$\mathbb{R}$. On pose $g = f^{-1}$.
   b) Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $g(x) = 2\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$
   c) Tracer dans le même repère C_g.

3. Soit la fonction h définie sur J = [0, π] par : $\begin{cases} h(x) = g\left(\frac{1}{tanx}\right) & si\ x \in]0,\pi[\\ h(0) = 4 \\ h(\pi) = 0 \end{cases}$

a) Montrer que h est continue sur J
b) Vérifier que pour tout x ∈ J, on a : g(x) = 2(1 + cos x).
c) Montrer que h réalise une bijection de J sur un intervalle K `a préciser. On note $H = h^{-1}$
d) Montrer que H est dérivable sur I et que $\forall x \in I$, $H'(x) = -\frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$.
4. On pose F(x) = H(x) + H(4 − x) pour tout x ∈ [0, 4].

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014
B.Zouhaier

a) Montrer que F est continue sur [0, 4] et dérivable sur]0,4[et calculer F'(x) pour tout
$x \in]0, 4[$.
b) En déduire que $\forall x \in [0, 4]$ on a $H(x) + H(4 - x) = \pi$

Exercice n°35 : (probabilité)

Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25% au premier fournisseur et 75% au second.
La proportion de composants défectueux est de 3% chez le premier fournisseur et de 2% chez le second.
On note : D l'évènement « le composant est défectueux »
F1 l'évènement « le composant provient du premier fournisseur »
F2 l'évènement « le composant provient du deuxième fournisseur »
1. a) Dessiner un arbre pondéré.
b) Calculer $p(D \cap F1)$, puis démontrer que $p(D) = 0{,}0225$.
c) Le responsable du magasin découvre qu'un de ses composants est défectueux.
Quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?
Dans la suite de l'exercice, on donnera une valeur approchée de résultats à 10^{-3} près.
2. Le responsable commande 20 composants. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux ?
3. Des études montrent que la durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire noté X qui suit la loi de durée de vie sans vieillissement ou loi exponentielle de paramètre λ , avec λ réel strictement positif.
a) Sachant que $p(X > 5) = 0{,}325$, déterminer λ .
Pour les questions suivantes, on prendra $\lambda = 0{,}225$.
b) Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ? Plus de 8 ans ?
c) Le responsable du magasin vérifie les composants. Il constate que l'un d'entre eux fonctionne depuis 3 ans.
Quelle est la probabilité que ce composant dure plus de 8 ans ?

Exercice n°36 : (analyse)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2}\right)$

1. a)Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$
   b)Montrer que le point I (1,0) est un centre de symétrie de C_f
   c)Dresser le tableau de variation de C_f et tracer C_f dans un repère orthonormé
2. On pose $I_0 = \int_0^2 \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 2t + t}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^2 \frac{(t-1)^{2n} dt}{\sqrt{t^2 - 2t + t}}$ et
   $k = \int_0^2 \sqrt{t^2 - 2t + t}\, dt$
   a)Calculer I_0
   b)Montrer que $I_0 + I_1 = k$

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

c) En utilisant une intégration par parties sur I_1 ; Montrer que $I_1 + k = 2\sqrt{2}$ en déduire la valeur de I_1

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{\sqrt{2}}{2n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{2n+1}$ en déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$

Exercice n°37 : (équation différentielle)

1. On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$

a) Vérifier que la fonction f définie par $f(x) = xe^{-x}$ est une solution de (E).

b) Démontrer que y est solution de (E) si et seulement si $(y - f)$ est solution de (E_0) : $y' + y = 0$.

c) Résoudre l'équation différentielle (E_0) et en déduire l'ensemble des solutions de (E).

2. On désigne par (E') l'équation différentielle $y'' + y' = e^{-x}$.

a) On pose $z = y'$. Vérifier que z est solution de (E).

b) Expliciter $\int_0^x te^{-t}dt$ avec x un réel.

c) En déduire la résolution de(E') .

Exercice n°38 : (probabilité)

Des robots se trouvent au centre de gravité O d'un triangle de sommets S, I et X. Chacun se déplace en trois étapes successives de la manière suivante :

- à chaque étape, il passe par l'un des trois sommets S, I et X puis il rejoint le point O ;
- les robots sont programmés de telle sorte que, lors d'une étape, la probabilité de passer par le sommet S est égale à celle de passer par le sommet X et la probabilité de passer par le sommet S est le double de celle de passer par le sommet I ;
- les différentes étapes sont indépendantes les unes des autres ;
- on ne tient pas compte des passages par O.

Partie A

Un seul robot se trouve au point O.

1. Démontrer qu'à chaque étape, la probabilité que le robot passe par le sommet I est égale à $\frac{1}{5}$

2. On note E l'évènement : «au cours des trois étapes, le robot passe successivement par les 3 sommets S, I et X dans cet ordre».
Démontrer que la probabilité de E est égale à $\frac{4}{125}$

3. On note F l'évènement : «au cours des trois étapes, le robot passe exactement par les 3 sommets S, I et X dans un ordre quelconque».
Déterminer la probabilité de F.

Partie B

Des robots se trouvent au point O, leurs déplacements étant indépendants les uns des

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

autres.
Quel nombre minimal n de robots doit-il y avoir pour que la probabilité de l'évènement : «au moins l'un des robots passe successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre» soit supérieure ou égale à 0,99 ?

<u>Exercice n°39 : (probabilité)</u>

Une urne contient des boules indiscernables au toucher.
20 % des boules portent le numéro 1 et sont rouges.
Les autres portent le numéro 2 et parmi elles, 10 % sont rouges et les autres sont vertes.

1. On tire une boule au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?

2. On a tiré une boule au hasard. Elle est rouge.
Montrer que la probabilité qu'elle porte le numéro 2 est égale à $\overline{7}$

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise (après chaque tirage la boule est remise dans l'urne).
a) Exprimer en fonction de n la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages.
b) Déterminer l'entier n à partir duquel la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages est supérieure ou égale à 0,99.

<u>Exercice n°40: (arithmétique et complexe et similitude)</u>

Partie A

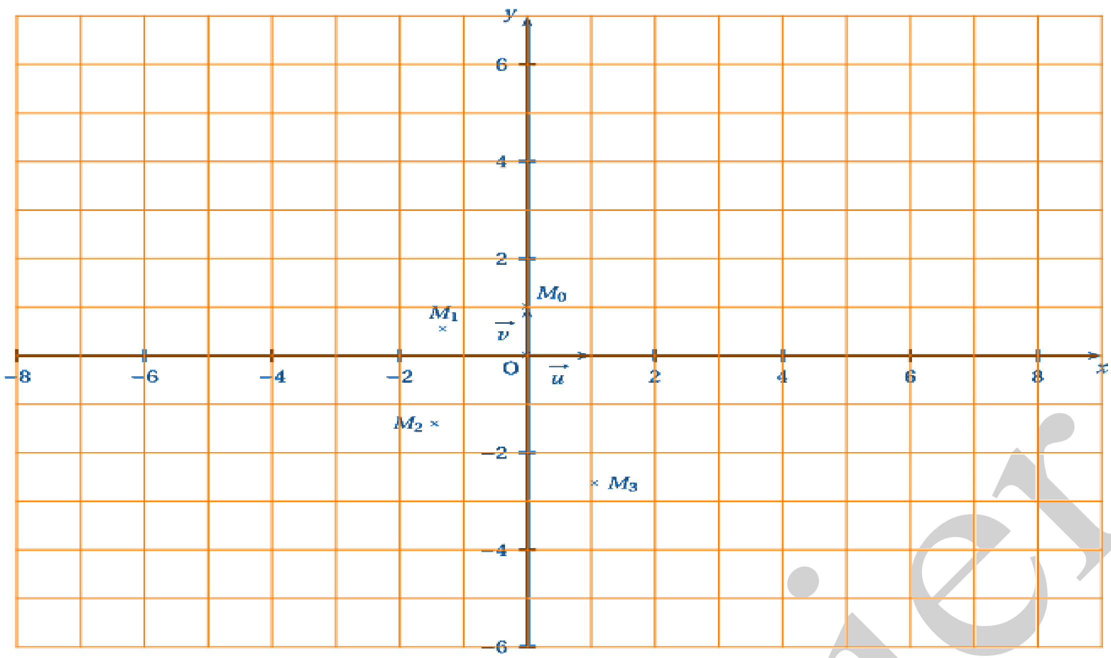
On cherche l'ensemble des couples d'entiers relatifs (x,y) solutions de l'équation
(E) : $16x - 3y = 4$
1. Vérifier que le couple (1, 4) est une solution particulière de (E).

2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct . $(O ;\vec{u};\vec{v})$
On considère la transformation f du plan, qui à tout point M d' affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{8}}z$
On définit une suite de points (M_n) *de la manière suivante :*
le point M_0 *a pour afflxe* $z_0 = i$ *et pour tout entier naturel n,* $M_{n+1} = f(M_n)$.
On note z_n *l'affixe du point* M_n
Les points M_0, M_1, M_2 *et* M_3 *sont placés sur la figure donnée en annexe ci-dessous.*

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014



1. *Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.*

2. *On note g la transformation f of ofof.*

   a) *Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g.*

   b) *En déduire que pour tout entier naturel n, $OM_{n+4} = 4OM_n$ et que $(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+4}}) = -\frac{\pi}{2} + k \times 2$ où k est un entier relatif.*

   c) *Compléter la figure en construisant les points M_4, M_5 et M_6.*

3. *Démontrer que pour tout entier naturel n, $z_n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3n\pi}{8}\right)}$*

4. *Soient deux entiers naturels n et p tels que $p \leq n$*

   a) *Exprimer en fonction de n et p une mesure de $(\overrightarrow{OM_p}, \overrightarrow{OM_n})$*

   b) *Démontrer que les points O, M_p et M_n sont alignés si et seulement si n - p est un multiple de 8.*

5. *Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que le point M_n appartienne à la demi-droite [Ox). On pourra utiliser la partie A.*

Exercice n°41 : (analyse)

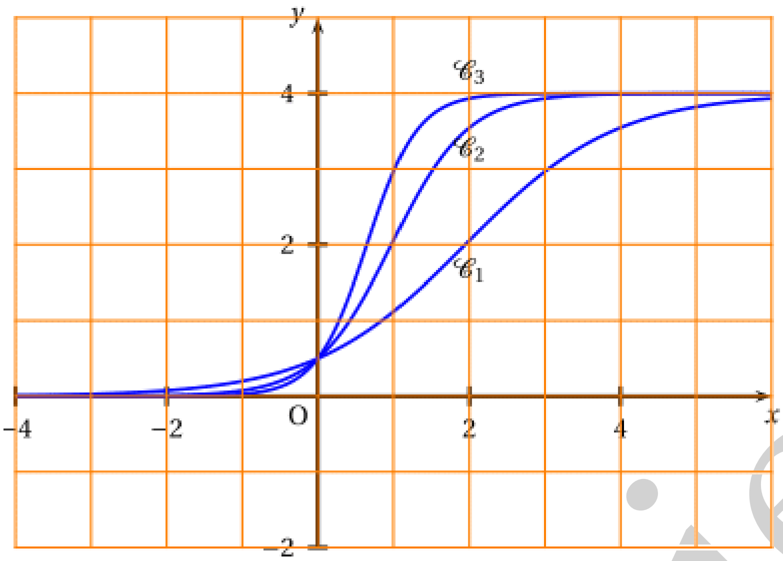
À tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur ℝ par

$f_n(x) = \frac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}$

.

B.Zouhaier
WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

On désigne par C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé les courbes C_1, C_2 et C_3 sont données en annexe ci-dessous.



Partie A :

Étude de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x+7}$

1. Vérifier que pour tout réel x, $f_1(x) = \frac{4}{1+7e^{-x}}$

2. a) Démontrer que la courbe C_1 admet deux asymptotes dont on précisera des équations.
b) Démontrer que la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
c) Démontrer que pour tout réel x, $0 < f_1(x) < 4$

3. a) Démontrer que le point I_1 de coordonnées (ln7 ; 2) est un centre de symétrie de la courbe C_1.
b) Déterminer une équation de la tangente (T_1) à la courbe C_1 au point I_1.
c) Tracer la droite (T_1).

4. a) Déterminer une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.
b) Calculer la valeur moyenne de f_1 sur l'intervalle [0 ;ln7]

Partie B :

Étude de certaines propriétés de la fonction f_n.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul le point A $(0\,;\frac{1}{2})$ appartient à la courbe C_n.

2. a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul la courbe C_n et la droite d'équation y=2 ont un unique point d'intersection dont on précisera l' abscisse.
On note I_n ce point d'intersection.

B.Zouhaier

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

b) Déterminer une équation de la tangente (T_n) à la courbe C_n au point I_n.
c) Tracer les droites (T_2) et (T_3).

3. Soit la suite U définie pour tout entier naturel n non nul par $U_n = \frac{n}{ln7}\int_0^{\frac{ln7}{n}} f_n(x)dx$

.

Montrer que la suite U est constante.

Exercice N°42 : (probabilité)

Un jeu consiste à tirer simultanément 4 boules indiscernables au toucher d'un sac contenant une boule noire et 9 boules blanches, puis à lancer un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
Si la boule noire est tirée, il faut obtenir un nombre pair avec le dé pour gagner. Si la boule noire n'est pas tirée, il faut obtenir un six avec le dé pour gagner.
On appelle N l'évènement «la boule noire figure parmi les boules tirées» et G l'évènement «le joueur gagne».

1. a) Déterminer la probabilité de l'évènement N.
b) Démontrer que la probabilité de l'évènement G est égale à $\frac{3}{10}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
c) Le joueur ne gagne pas. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré la boule noire ?

2. Pour jouer à ce jeu, une mise de départ de m Dinars est demandée, où m est un réel strictement positif.
Si le joueur gagne, il reçoit 4 Dinars.
S'il ne gagne pas mais qu'il a tiré la boule noire, le joueur récupère sa mise.
S'il ne gagne pas et qu'il n'a pas tiré la boule noire, le joueur perd sa mise.
On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Exprimer l'espérance mathématique de X en fonction de m.
c) On dit que le jeu est équitable si l'espérance mathématique de X est nulle. Déterminer m pour que le jeu soit équitable.

3. Soit n un entier naturel non nul.
On joue n fois à ce jeu sachant qu'après chaque partie les boules sont remises dans le sac.
Déterminer la valeur minimale de n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une fois est supérieure à 0,999.

Exercice n°43 : (probabilité)

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

de la maladie.
On obtient les résultats suivants :

- *si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;*
- *si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.*

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.
On note :
M l'évènement : «l'animal est porteur de la maladie» ;
T l'évènement : «le test est positif».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.

2. Un animal est choisi au hasard.
a) Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
b) Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.

3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?

4. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise.
On note X la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.
a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
b) Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ?

5. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.
D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,9405	0,0580	0,0015

a) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.
b) Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

Exercice n°44 : (probabilité)

B.Zouhaier
WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes et trois rouges.

Les questions 1. et 2. sont indépendantes

1. On extrait simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage.

a) Vérifier que $p(X = 0) = \frac{3}{10}$ *puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.*

b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

c) Calculer la probabilité de l'évènement suivant:
A : «les deux boules tirées sont de même couleur».

2. On effectue deux tirages successifs d'une boule en respectant la règle suivante : si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne ; si elle est verte, on ne la remet pas.

a) En utilisant un arbre pondéré, calculer la probabilité des évènements suivants :
B : «seule la première boule tirée est verte»,
C : «une seule des deux boules tirées est verte».

b) Sachant que l'on a tiré exactement une boule verte, quelle est la probabilité que cette boule verte soit la première tirée ?

<u>Exercice n°45 : (probabilité)</u>

Des études statistiques montrent que 10% des individus d'une population souffrent d'une maladie donnée. Un test est utilisé pour diagnostiquer la maladie. On établi les résultats suivants.

- *Sachant qu'un individu est malade. La probabilité qu'il ait un test positif est 0,85*
- *Sachant qu'un individu n'est pas malade. La probabilité qu'il ait un test négatif est 0,87*

On désigne par A : « être malade »
B : « Avoir un test positif »

1. *Calculer les probabilités des événements :* $A \cap B$ *et* $\bar{A} \cap B$ *. En déduire la probabilité de B*
2. *Quelle la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit malade ?*

<u>Exercice n°46 : (probabilité)</u>

Une urne contient : 4 boules noires et 3 boules blanches

1. *Une première épreuve consiste a tirer simultanément deux boules de l'urne et on désigne par X l'aléa numérique égale au nombres de boules blanches tirées*
   a) Déterminer la loi de probabilité de X
   b) Calculer E(X), V(X) et σ *(X)*

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

2. *On considère une deuxième épreuve comme suit : On tire une boule de l'urne*

- *Si elle est noire on la garde et on tire une deuxième*
- *Si elle blanche on la remet et on tire une deuxième*

On considère les événements suivants :

A : « avoir 2 boules noires »

B : « avoir 2 boules blanches »

C : « avoir une boule noire au $2^{éme}$ tirage »

Calculer p(A), p(B) et p(C)

Exercice n°47 : (probabilité)

A et B désignent deux ensembles de même cardinal (card A=cardB) tels que : card (A∪ B)= 2n et card(A ∩ B) = 6 ou n désigne un entier tel que : $n \geq 1$

1. *Déterminer card A*
2. *On choisit au hasard et simultanément 2 éléments de (A ∪ B) et on note E : « avoir au moins un élément de A »*
   a)Calculer p(E)
   b) Soit X l'aléa numérique qui a chaque tirage fait correspondre le nombre d'éléments de A . Donner la loi de probabilité de X puis calculer E(X) et V(X)
3. *On considère l'épreuve qui consiste a tirer un élément de A ∪ B s'il est de A on le remet dans A ∪ B et on tire un deuxième on pose :*
   A_1 : « le $1^{ér}$ élément tiré est de A »
   C : « avoir exactement un élément de A »
   a) Faite un arbre pondéré
   b) Calculer p(C) et $\lim_{n\to+\infty} p(C)$
   c) Calculer $p(A_1 / C)$

Exercice n°48 : (probabilité)

(E, p(E), p) désigne un espace probabilisé fini et X désigne une variable aléatoire sur E dont la fonction de répartition F est la suivante :

$$F(x)=\begin{cases} 0 \ si \ \ x < -1 \\ \frac{1}{3} \ si -1 \leq x < 2 \\ \frac{3}{5} \ si \ 0 \leq x < 2 \\ 1 \ si \ x \ \geq 2 \end{cases}$$

1. *Tracer dans un repère orthonormé (C_F)*
2. *a)Donner la loi de probabilité de X*
   b) Calculer E(X), V(X) et σ (X)

Exercice n°49 : (probabilité)

Deux dés cubiques parfaits sont lancés a la fois

- *Si on obtient le même numéro on perd 10 points*
- *Si les deux numéros sont de parités différentes on perd 5 points*
- *Dans les autres cas on gagne 15 points*

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

1. *On désigne par X l'aléa numérique correspondant au nombre de points obtenus après un lancé*
   a)Déterminer la loi de la probabilité de X
   b) Représenter la fonction de répartition de X
2. *L'épreuve précédente est répétée 10 fois de suite, on appelle Y l'aléa numérique le nombre de fois qu'on gagne*
   a)Définir l'événement (Y = 2) et calculer p(Y = 2)
   b) Calculer p(Y ≥ 1) et E(Y)
3. *La même épreuve est répétée n fois de suite (n≥ 2)*
   a)Calculer $\lim_{n\to+\infty} p(Y \geq 1)$
   b) Déterminer n pour que $p(Y \geq 1)$ *soit supérieur strictement à 0,999*

Exercice n°50 : (probabilité)

Tesnim débute au jeu de fléchettes elle effectue des lancers successifs d'une fléchette

- *Si elle atteint la cible a un lancer la probabilité qu'elle atteint la cible au lancer suivant est égale à* $\frac{1}{3}$ *et si elle manque la cible à un lancer la probabilité qu'elle la manque au lancer suivant est* $\frac{4}{5}$ *au premier lancer elle a la même chance d'atteindre ou de manquer la cible pour* $n \geq 1$ *on considère*
  A_n *: « Tesnim atteint la cible au* $n^{iéme}$ *lancer »*
  B_n *: « Tesnim rate la cible au* $n^{iéme}$ *lancer » et on pose* $p_n = p(A_n)$
  A_{n-1} *: « Tesnim attient la cible au* $(n-1)^{iéme}$ *lancer) et* $p_{n-1} = p(A_{n-1})$

1. *Déterminer* p_1 *et* p_2
2. *Exprimer* p_n *en fonction de* p_{n-1}
3. *On pose* $U_n = p_n - \frac{3}{13}$
   a) *Montrer que* U_n *est géométrique*
   b) *Exprimer* p_n *en fonction de n*
   c) *Calculer* $\lim_{n\to+\infty} p_n$

Exercice n°51 : (probabilité)

Une entreprise en matériel informatique fabrique des disquettes
4% des disquettes fabriquées sont défectueuses
Les disquettes sont contrôlées et tirées en trois lots

- *Disquettes marquées (les disquettes qui portent la marque de l'entreprise)*
- *Disquettes démarquées*
- *Disquettes a déduire*

L'unité de contrôle rejette 3% des bonnes disquettes et 95% des disquettes défectueuses

1. *Quelle est la probabilité pour qu'une disquette choisie défectueuse et acceptée par l'appareil de contrôle ?*
2. *Quelle est la probabilité pour qu'une disquette soit bonne et refusée ?*
3. *Quelle est la probabilité pour qu'il ait une erreur de contrôle ?*

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

B.Zouhaier

4. *Déterminer la probabilité pour qu'une disquette soit acceptée par l'appareil de contrôle*
5. *On pose que le contrôle s'effectue par 5 test succéssifs une disquette reçoit la marque de l'entreprise si elle subit avec succès 5 contrôles successifs. Elle est réduite si elle refusée au moins deux fois et elle est démarquée dans les autres cas*
   a)Quelle la probabilité pour qu'une disquette soit démarquée ?
   b) Quelle est la probabilité pour qu'une disquette soit détruite ?

Exercice n°52 : (probabilité

On dispose de 3 pièces : la première fait pile avec une probabilité (0, 1) ; la seconde avec la probabilité (0,4) et la troisième avec (0,6). On choisit au hasard l'une des pièces et on la lance trois fois de suit et on désigne par X l'aléa numérique qui correspond au nombre de fois qu'on obtient « pile »

1. *Calculer* $p(X = 0)$ *et* $p(X \geq 1)$
2. *Calculer* $E(X)$ *et* $V(X)$
3. *On répète l'épreuve précédente n fois* $(n \geq 2)$ *et on désigne par Y le nombre de fois qu'on obtient* $(X = 0)$
   a)Calculer $p(Y = 0)$
   b) Déterminer la plus petite valeur de n pour la quelle on aura $p(X \geq 1) > 0{,}9$

Exercice n°53 : (probabilité)

Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules : 75% de particules de type A et 25% de particules de type B. les particules A sont radioactives et se transforment spontanément en particules B
On note p(t) la proportion de particules A dans le gaz a chaque instant t on suppose que $p(t) = \gamma\, e^{-\gamma t}$ *avec* $\gamma > 0$ *(t en années) a t = 5730 on a a :* $\frac{1}{2}\, p(0)$

1. *Calculer une valeur approchée de* γ *a* 10^{-5} *par défaut*
2. *Au bout de combien d'années 10% des particules de types A seront transformées en particules de types B*
3. *Déterminer la valeur de t pour la quelle il y aura autant de particules de types A que particules de type B.*

Exercice n°54 : (probabilité)

On dispose de 3 pièces. La première fait pile avec une probabilité (0,1) , la seconde avec la probabilité (0,4) et la troisième avec la probabilité (0,6). On choisit au hasard l'une des pièces et on la lance une seule fois et on note A : « avoir pile »

1. *Calculer* $p(A)$
2. *On répète l'épreuve n fois de suite* $(n \geq 2)$ *et on désigne par X le nombre de fois qu'on obtient A*
   a)Calculer $p(X=0)$ *et* $p(X \geq 1)$

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

b) Calculer E(X) et V(X)
c)Déterminer la plus petite valeur de n pour la quelle p(X≥ 1) $> 0{,}8$

Exercice n°55 :(analyse)

Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$

1. a)Calculer I_1
   b)Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a : $I_n = e - nI_{n-1}$
2. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_1^{e^x} (\ln t)^n dt$
   a)Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer F'(x)
   b)Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $I_n = F(e) - F(1) = \int_0^1 t^n e^t dt$
   c)Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$
   et calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$

Exercice n°56 : (equation différentielle)

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : y''+4y = 0
2. Soit (E) : y''+4y = $8e^{2x}$
   a)Déterminer le réel γ pour que la fonction f telle que $f(x) = \gamma e^{2x}$ soit solution de (E)
   b) Montrer que g est solution de (E) ssi (g – f) est solution de (E_0)
   c)Déduire les solutions de (E)

Exercice n°57 : (anal) Tracer dans un repère orthonormé (C_f)

1. Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_1 = 1 + \frac{1}{e}$ et $U_{n+1} = U_n\left(1+\frac{1}{e^{n+1}}\right)$
   a)Etudier les variations sur $]0, +\infty[$ des fonctions $t \longmapsto \ln(1+t)$
   et $t \longmapsto \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{2}$
   b) En déduire que pour tout $t > 0$ on a $t - \frac{t^2}{2} < \ln(1+t) < t$
   c)Prouver que $e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} < f(x) < e^{-x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$
2. a)Montrer que (U_n) est croissante
   b) Montrer que $\ln(U_n) = f(1) + f(2) + \dots\dots + f(n)$
3. a) Calculer les sommes $S_1 = \sum_{k=1}^{n} e^{-k}$ et $S_2 = \sum_{k=1}^{n} e^{-2k}$
   b) Montrer que $S_1 - \frac{1}{2}S_2 \leq \ln(U_n) \leq S_1$
   c)Déduire que (U_n) est convergente vers l et que $\frac{2e+1}{2(e^2-1)} \leq \ln(l) \leq \frac{1}{e-1}$

yse)

Soit f fonction définie sur $\mathbb{R}$

par $f(x) = \ln(1+e^{-x})$la

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

4. a) dresser le tableau de variation de f
   b) Montrer que $\Delta : y = x$ est une asymptote a (C_f) au voisinage de $(-\infty)$
   c)Etudier la position de (C_f) et Δ
   d

Exercice n°58 : (probabilité)

On considère deux dés identiques parfaits dont les faces sont marquées : $0,0,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\frac{4\pi}{3}$

On lance simultanément les deux dés et on lit les résultats α et β de leurs faces supérieurs. Soit X la variable aléatoire qui a chaque lancer des deux dés associe la valeur $\sin(\alpha+\beta)$

1. a)Déterminer x(E)
   b) Déterminer la loi de probabilité de X
2. Calculer E(X) et V(X)
3. a)Déterminer la fonction de répartition F de X
   b) Tracer dans un repère orthogonal C_f

Exercice n°59 : (similitude)

ABCD désigne un carré direct de centre O et I et J les milieux respectifs de [AB] et [BC]

1. a)Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A sur C et B sur D. Caractériser f
   b) Soit g l'antidéplacement qui envoie A sur C et B sur D. Déterminer $(gof)_{(c)}$ et $(gof)_{(D)}$. Caractériser gof
   c)Déduire la forme réduite de g
2. Soit S la similitude directe qui envoie A sur B et D sur I
   a)Déterminer le rapport et l'angle de S. Construire le centre Ω de S
   b) Déterminer les images des droites (AC) et (CD) par S. En déduire que le triangle $O\Omega C$ est rectangle
   c)Déterminer l'image du carré ABCD par S
   d) Montrer que les points A, Ω et J sont alignés

Exercice n°60 : (similitude)

ABC désigne un triangle isocèle en A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}(2\pi)$ et on désigne par I le milieu de [BC] et par J le projeté orthogonal de B sur (AC) et f la similitude indirect de centre C qui transforme A en B

1. a)Déterminer le rapport de f
   b) Préciser l'axe Δ de f
2. Soit B'=f(B)
   a)Préciser la nature et les éléments caractéristiques de fof

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

b)En déduire que $\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{3CA}$ .Construire le point B'
c)Montrer que BB'=BC
d)En déduire que f(I) = J
3. Soit S = $foS_{(BC)}$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la similitude S

Exercice n°61 : (similitude)

ABC désigne un triangle quelconque de sens direct I et J les milieux respectifs de [BC] et [AB] et R désigne la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$

A' et C' sont les images respectives de A et C par R.S la similitude directe qui envoie I sur C' et J sur A' on pose $h=R^{-1}oS$

1. a)Déterminer les images de I et J par h
   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de h
2. a)Montrer que (IJ) est perpendiculaire à (A'C') et que A'C' = 2IJ
   b) Déterminer le rapport et l'angle de S et construire son centre O
   c)Soit B' le symétrique de A' par rapport à J . Montrer que (OB) est perpendiculaire à (OB')

Exercice n°62 : (similitude)

ABC un triangle isocèle et rectangle en A tel que : $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$. On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs de [AB],[BC],[AC] et [JC]

1. Soit f la similitude direct de centre J qui envoie A sur K
   a)Déterminer l'angle et le rapport de f
   b) Justifier que f(K) =L
   c) Soit H le milieu de [AJ]. Justifier que f(I) = H
2. On munit le plan du repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $\varphi : P \to P$ qui a M(Z) associe M'(Z') tel que Z'= $-\left(\frac{1+i}{2}\right)\bar{Z} + \frac{1+i}{2}$
   a)Montrer que φ est une similitude indirecte de centre C.
   b) Donner les affixes des points I, K,J et H
   c)Déterminer φ (I) et φ(J)
   d) Déduire que φ= $foS_{(IK)}$
3. Soit Δ l'axe de φ
   a)Tracer Δ
   b) La droite Δ coupe (IK) et (HL) respectivement en P et Q.Montrer que $\varphi(P) = f(P)$ et en déduire que $\varphi(P) = Q$

Exercice n°63 :(analyse)

Soit f le fonction définie sur]1,+∞[par $f(x) = e^{-\sqrt{x-1}}$ et on désigne par (C)sa courbe dans un repère orthonormé

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

1. *Montrer que* $\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-1}{x-1} = -\infty$ *et déterminer* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
2. *Dresser le tableau de variation de f et tracer (C)*
3. *a)Montrer que f réalise une bijection de]1,+∞[sur un intervalle J que l'on précisera*
   b)La fonction f^{-1} *est –elle dérivable à gauche en 1 ? justifier votre réponse*
   c)Tracer la courbe de f^{1}
   d)Expliciter $f^{1}(x)$ *pour tout x ϵ J*
4. *Soit F la fonction définie sur]0,1] par* $F(x) = \int_1^{1+(lnx)^2} f(t)dt$
   a)Montrer que f est dérivable sur]0,1] et que F'(x) = 2lnx
   b)En déduire F(x) pour tout x ϵ]0,1]
5. *Pour tout* $\gamma \geq 1$, *on désigne par* $A(\gamma)$ *l'aire de la partie du plan limitée par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et x =* γ
   a) Montrer que $A(\gamma) = F(f(\gamma))$
   b) Calculer $A(\gamma)$ *et* $\lim_{\gamma\to+\infty} A(\gamma)$

Exercice n°64 : (analyse)

1. *Soit f la fonction définie sur]0,+∞[par* $g(x) = x - 1 + \frac{1}{2}lnx$
   Dresser le tableau de variation de g . Calculer g(1) et en déduire le signe de g(x) pour tout $x > 0$
2. *Soit la fonction f définie sur]0,+∞[par* $f(x) = \frac{2x-lnx}{2\sqrt{x}}$
   a)Montrer que pour tout $x > 0$: $f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$ *et dresser le tableau de variation de f . Tracer* (C_f)
   b) Calculer , l'aire de la partie du plan limitée par (C_f) *, l'axe des abscisses et les droites x= 1 et x = 2*
3. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *; on considère la fonction* g_n *définie sur]0,+∞[par* $g_n(x) = x - n + \frac{n}{2}lnx$
   a)Etudier le sens de variation de g_n *et dresser son tableau de variation*
   b)Montrer qu'il existe un unique réel α_n *tel que* $g_n(\alpha_n)=0$
   c)Montrer que pour tout n ϵ N ;* $1\leq \alpha_n \leq e^2$
   d)Montrer que pour tout n ϵ N ;* $\ln(\alpha_n)=2-\frac{2\alpha_n}{n}$
   e)Exprimer $g_{n+1}(\alpha_n)$ *en fonction de n et* α_n *; Montrer que la suite* $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ *est convergente et calculer* $\lim_{x\to+\infty} \ln(\alpha_n)$

Exercice n°65 : (similitude)

Soit ABC un triangle rectangle en c tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$ *et soit r la rotation de centre A et d'angle* $\frac{\pi}{2}$

Soient D = r(c) et E= $r^{-1}(B)$*. On désigne par I le milieu du segment [CD]*

1. *a)Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f(A) = D et f(C) = A*

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f

2. Soit g = for
   a)Montrer que g est une translation
   b) Soit F = g(E). Montrer que f(B) = F et en déduire la nature du triangle BIF
   c)Montrer que les points C, A et F sont alignés
3. Soit G = $t_{\overrightarrow{AD}}(I)$ où $t_{\overrightarrow{AD}}$ désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$
   a)Montrer qu'il existe un unique antidéplacement φ tel que φ(C)=D et φ(I) = G
   b) Montrer que φ est une symétrie glissante dont on précisera le vecteur et l'axe

Exercice n° 66 : (analyse)

Soit f la fonction définie sur ℝ par : f(x) = $\sqrt{x^2 - 4x + 5}$

On désigne par (C) sa courbe représentation dans le plan rapporté à un répere orthonormé

1. a)Dresser le tableau de variation de la fonction f
   b) Montrer que la courbe (C) admet deux asymptotes obliques Δ et Δ'dont on déterminera des équations cartésiennes
   c) Tracer Δ, Δ' et (C)
2. Soit Ω le point de coordonnées (2,0)
   a)Trouver une équation cartésienne de la courbe (C) dans un le repère $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
   b) En déduire que dans le repère $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la courbe (C) est la représentation graphique de la fonction g définie sur ℝ par g(x) = $\sqrt{1 + x^2}$
3. Soit F la fonction définie sur ℝ par F(x) = $\int_0^{u(x)} g(t)dt$ où u(x) = $\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}})$
   a)Résoudre dans ℝ l'équation : u(x) = 1
   b) Montrer que la fonction F est dérivable sur ℝ et que pour tout x de ℝ , on a :F'(x) = = $\frac{1}{8}(e^x + e^{-x} + 2)$
   c)Calculer l'aire de la partie du plan limitée de la courbe (C) et les droites l'équations respectives x = 2, x= 3 et y = 0 relativement au repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Exercice n°67 : (analyse)

Soit f la fonction définie par f(x) = $2e^{2x} - e^x$

1. a)Dresser le tableau de variation de f
   b)Tracer en précisant les points d'intersections avec les axes la courbe de f
2. Soit γ un réel de] -∞, $-\ln 2$[. Déterminer l'aire du domaine limité par (C_f), (xx') et les deux droites x = γ et x = -ln2
3. Soit g la restriction de f à l'intervalle [- 2ln2, + ∞[= I
   a)Montrer que g réalise une bijection de I vers un intervalle J que l'on précisera
   b)Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout x ϵ J

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

B.Zouhaier

c)Tracer dans le même repére ($C_{g^{-1}}$)

Exercice n° 68 : (analyse)

On considère la fonction f définie sur [0,1[par f(x) = ln(1 - $\sqrt{x}$) et on désigne par (C) sa courbe dans un repère orthonormé

1. *Montrer que* $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} = -\infty$
2. *a) Montrer que f réalise une bijection de [0,1[sur un intervalle J que l'on précisera*
   b)Tracer (C') la courbe de f^{-1} dans le repère
3. *a)Montrer que pour tout x de J, $f^{-1}(x) = (e^x - 1)^2$*
   b)Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par (C'), l'axe des abscisses et la droite x = -ln2
   c) On déduire $\int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1-\sqrt{x})\,dx$

Exercice n°69 : (analyse)

On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \int_{-1}^{0} \frac{xe^x}{n+e^x}dx$ et on pose $I = \int_{-1}^{0} xe^x dx$

1. *a)Calculer I*
   b)Montrer que pour tout x ϵ [-1,0], $\frac{xe^x}{n} \leq \frac{xe^x}{n+e^x} \leq \frac{xe^x}{n+1}$
   c)Montrer que la suite U est convergente et calculer sa limite
2. *On pose $V_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$*
   a) *Montrer que pour tout entier naturel non nul k,* $\int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{k+1}$
   b) *En déduire que* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \geq \ln(n+2) - ln2$
   c) *Montrer alors que* $\lim_{n\to+\infty} V_n = -\infty$

Exercice n°70 : (similitude et complexe)

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne le point A d'affixe 1.

Soit l'application f de P dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}z + 1 - \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

1. *Déterminer la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques*
2. *Soit le point M_0 d'affixe 2. On pose pour tout entier naturel n , $M_{n+1} = f(M_n)$.*
   On désigne par z_n l'affixe du point M_n et Z_n l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM_n}$
   a) *Montrer que* $Z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$
   b) *Montrer que pour tout n de ℕ,* $Z_n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$
   c) *En déduire l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles les points A, M_0 et M_n sont alignés.*

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

Exercice n°71 : (analyse)

1. *Soit f la fonction définie sur* $[0\ ,+\infty[$ *par* $f(x) = x^2 e^{1-x^2}$
   On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé
   a) *Montrer que* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
   b) *Dresser le tableau de variation de f*
   c) *Construire la courbe (C)*
2. *Soit U la suite définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par* $U_n = \int_0^1 x^n e^{1-x^2} dx$
   a) *Calculer* U_1
   b)*Montrer que pour tout* $n \geq 2$ *on a :* $\frac{1}{n+1} \leq U_n \leq \frac{e}{n-1}$.
3. *En déduire que U est convergente et trouver sa limite*
4. a)*Montrer à l'aide d'une intégration par partie que pour tout n de* $\mathbb{N}^*$ $U_{n+2} = \left(\frac{n+1}{2}\right) U_n - \frac{1}{2}$
   b)*En déduire l'aire du domaine limité par la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x= 0 et x = 1*

Exercice n°72 : (similitude)

Dans un plan orienté, ABC est un triangle quelconque de sens direct.

I et J sont les milieux respectifs des côtés [BC] et [AB]

r est la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$

A' et C' sont les images respectives des points A et C par r

S est la similitude directe qui transforme le point I en C' et le points J en A'. On pose $h = r^{-1} o S$

1. a)*Déterminer les images respectives des points I et J par h*
   b)*En déduire la nature et les éléments caractéristiques de h*
2. a)*Montrer que (IJ) est perpendiculaire à (A'C')et que A'C' = 2IJ*
   b)*Déterminer le rapport et l'angle de la similitude S et construire son centre ω*
   c)*B' étant le symétrique du point A' par rapport à J, montrer que (ωB)est perpendiculaire à (ωB').*

Exercice n°73 : (complexe)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$

1. *Soit E le point d'affixe* $z_E = 1+i+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$
   a)*Placer les points A et B d'affixes respectives 1+i et* $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$
   b)*Placer alors le point E en déduire un argument de* z_E
2. *Soient C,D,M et M' les points d'affixes respectives 1, -1,z et* $z' = \frac{z-1}{\bar{z}-1}$; $(z \neq 1)$

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

a)Montrer que le point M'appartient au cercle $\mathcal{C}$ (O,1)

b) Montrer que $\frac{z'+1}{z-1}$ est un réel. Interpréter graphiquement le résultat.

Exercice n°74 : (analyse)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)e^{-x}$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé

1. a)Dresser le tableau de variation de f
   b)Tracer la courbe $\mathcal{C}$ (on étudiera les branches infinies)
2. Soit $V_n = \int_0^n f(x)dx$ où $n \in \mathbb{N}^*$
   a)Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $V_n = 2 - (2+n)e^{-n}$
   b)Calculer $\lim_{n\to+\infty} V_n$
3. Pour tout k de $\mathbb{N}^*$ on pose $U_k = \int_{k-1}^k f(x)dx$
   Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $V_n=\sum_{k=1}^n U_k$
4. a)Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $U_k =(e-1)k\,e^{-k} +(e-2)e^{-k}$
   b)En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :
   $$V_n = (e-1)\sum_{k=1}^n ke^{-k} + \frac{e-2}{e-1}(1-e^{-n})$$
5. Soit $S_n = \sum_{k=1}^n ke^{-k}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{e}{(e-1)^2}$

Exercice n°75 : (arithmétique)

I/ 1. Démontrer que pour tout entier nature n, $4^n \equiv 1 (\mathrm{mod}\,3)$

2. Prouver que $4^{28} - 1$ est divisible par 29

3 .$1\leq n \leq 4$, déterminer le reste de la division de 4^n par 17. En déduire que pour tout entier naturel k, le nombre 4^{4k} est divisible par 17

4.Pour quelles entiers naturels n le nombre $4^n - 1$ est –il divisible par 5

5. A l'aide des questions précédentes , déterminer 4 diviseurs premiers de $4^{28} - 1$

II/ Soit p un nombre premier différent de 2

1.Démontrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $4^n \equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$.

2.Soit $n \geq 1$ tel que $4^n \equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$. On note b le plus petit entier naturel tel que $4^p \equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$ et r le reste de la division euclidienne de n par b

a)Démontrer que $4^r \equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$ en déduire que r = 0

b)Prouver l'équivalence : $4^n - 1$ est divisible par p ssi n est multiple de b

c)En déduire que b divise p – 1

Exercice n°76 : (analyse)

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

Soit f la fonction définie sur]0,+∞[par f(x) = $\frac{(x-2)e^x}{x^3}$ *et (C) sa courbe representative dans un répere orthonormé*

1. *a) Montrer que f'(x) =* $\frac{e^x(x^2-4x+6)}{x^4}$
   b)Déterminer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ *et* $\lim_{x\to +\infty} f(x)$
   c)Dresser le tableau de variation de f
2. *Montrer que la tangente Δ à* (C_f) *au point d'abscisse 2 a pour équation* $y = \frac{e^2}{8}(x-2)$
3. *On se propose d'étudier la position relative de* (C_f) *et la tangente Δ*
   Soit g la fonction définie sur]0, +∞[par g(x) = $\frac{e^x}{x^3}$ *. On donne ci-dessous le tableau de variation de g*

x	0		2		3		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{e^2}{8}$	↘	$\frac{e^3}{27}$	↗	$+\infty$

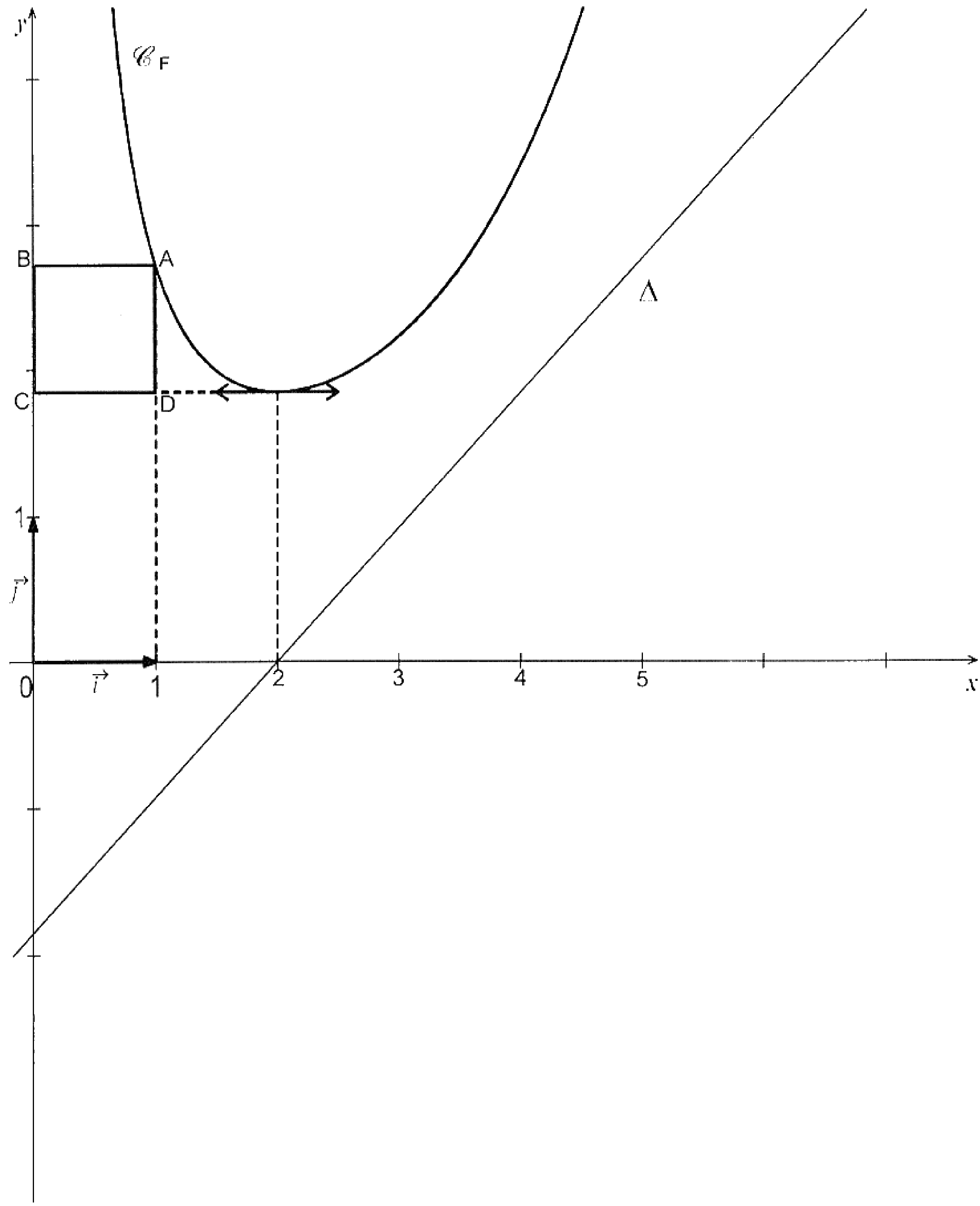
a) *Montrer que l'équation g(x) =* $\frac{e^2}{8}$ *admet dans]3 , + ∞[une solution unique α telle que 4,2< α < 4,3*
b) *Déduire la position relative de* (C_f) *et Δ*

4. *Justifier l'existence sur]3 , + ∞[d'une primitive F de f telle que F(1) = e*
5. *Dans le graphique ci-dessous on a tracé la courbe représentative* (C_f) *de la fonction F, la droite Δ et le rectangle ABCD tel que A(1, e) ; B(0, e) ; C(0, F(2)) et D(1, F(2))*
   a)Etudier les branches infinies de (C_f)
   b)Tracer la courbe (C_f)
6. *Soit t ϵ [1, 2[. On désigne par S(t) la partie du plan limitée par la courbe* (C_f) *, l'axe* $(O, \vec{\imath})$ *et les droites d'équations x= t et x = 2. On désigne par A(t) l'aire de S(t)*
   a)Exprimer A(t) en fonction de F(t)
   b)Hachurer S(1) et justifier qu'elle a la même aire que le rectangle ABCD
   c)Montrer qu'il existe un unique t_0 *ϵ [1,2[tel que* $A(t_0) = \frac{1}{2}A(1)$
   d)Construire le point de (C_f) *d'abscisse* t_0

B.Zouhaier

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

ANNEXE A RENDRE AVEC LA FEUILLE DE COPIE



4/4

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

Exercice n°77 : (analyse)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par f(x) = x + (x – 1) e^{-x} et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé

1. a) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
   b)Montrer que la droite Δ d'équation y = x est asymptote à la courbe C au voisinage de +∞
   c)Déterminer la position relative de C et Δ
2. On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f

x	0		+∞
f'(x)	3	+	
f(x)	-1	↗	+∞

   a)Montrer que l'équation f(x) = 0 admet , dans $\mathbb{R}_+$ une seule solution α et vérifier que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$
   b)Tracer la droite Δ et la courbe C. On précisera la demi tangente à C au point d'abscisse 0 et on prendre α ≅ 0,4)
3. On désigne par U la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \int_\alpha^1 |f(x)|^n dx$
   a)Calculer U_1 . Interpréter graphiquement le résultat obtenu
   b)Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$
   c)En déduire la limite de la suite U

Exercice n°78 : (similitude)

ABCD est un rectangle de centre O et tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

Le point E désigne le symétrique du point A par rapport à D

Soit S la similitude directe de centre C, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$

1. a)Justifier que S(A) = B
   b)Montrer que le triangle ACE est équilatéral et en déduire que S(E) = O
2. Soit I un point du segment [EO], distinct des points O et E et soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre I et passant par A
   Les droites (AD) et (AB) recoupent le cercle $(\mathcal{C})$ respectivement en M et P
   a)Tracer $(\mathcal{C})$et placer les points M et P
   b)Justifier que le point C appartient à $(\mathcal{C})$
3. Soit N le projeté orthogonal du point C sur la droite (MP)

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

a)Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MC}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$
b)En déduire que $S(M) = N$

4. Montrer que les points B, D et N sont alignés.

Exercice n°79 : (arithmétique)

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3x+4y = -8$

1. a) Vérifier que (0, -2) est une solution de (E)
   b)Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E)
2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé . On considère la droite Δ dont une equation est : $3x+4y+8 = 0$ et on désigne par A le point de Δ d'abscisse 0
   a)Montrer que si M est un point de Δ à coordonnées entières alors AM est multiple de 5
   b)Soit N un point de Δ de coordonnées (x,y). Vérifier que $AN = \frac{5}{4}|x|$
   c)En déduire que si AN est multiple de 5 alors x et y sont des entiers

Exercice n°80 : (complexe)

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation

(E) : $z^3 + (5 + i)z^2 + (10+2i)z+8 = 0$

1. a)Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera
   b)Résoudre l'équation (E)
2. Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct , on considère l'application f qui à pour tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1+i)z$
   a)Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f
   b)Soit M un point du plan distinct de O et soit M' son image par f
   Montrer que le triangle OMM' est rectangle isocèle et en déduire un procédé de construction du point M'
3. On considère les points A_n définis par : A_0 le point d'affixes $(-1+i)$ et pour tout entier naturel n , $A_{n+1}= f(A_n)$
   a)Placer les points A_0 , A_1, A_2, A_3 et A_4
   b)Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?

Exercice n°81 : (similitude)

Le plan est orienté dans le sens direct, ABCD est un losange de centre O, I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [AD] et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

1. a)Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui transforme A en B et B en D
   b)Caractériser f
   c)Déterminer l'image du triangle ABD par f

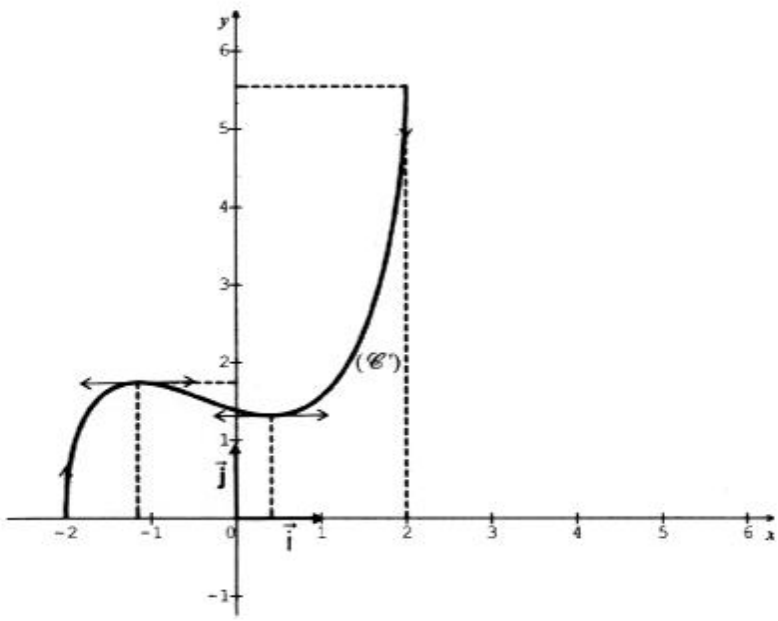
WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

2. *Soit S un antidéplacement qui transforme l'ensemble {A ,B ,D}en l'ensemble {B,C,D} et tel que S(A) = C*
   a)Déterminer l'image du segment [BD] par S
   b)En déduire que S est la symétrie orthogonale d'axe (BD)
3. *Soit g un antidéplacement qui transforme l'ensemble {A,B,D} en {B,C,D} et tel que g(A) = D*
   a)Montrer que g(D)=B
   b)Caractériser alors g

<u>Exercice n°82 :(analyse)</u>

1. *Soit f la fonction définie sur [-2,2] par f(x) =* $\begin{cases}(x+2)\ln(x+2) & si\ x \neq -2 \\ f(-2)=0\end{cases}$
   et $(\mathcal{C})$ *sa représentation graphique dans un repère orthonormé*
   a) Montrer que f est continue à droite en (-2)
   b)Etudier la dérivabilité de f à droite en (-2)
   c)Donner le tableau de variation de f
2. *Soit g la fonction définie sur [-2, 2] par g(x) = f(x) -* $x\sqrt{4-x^2}$ *et* $(\mathcal{C}')$ *sa courbe représentative dans le repère orthonormé*
   a)Déterminer la position relative des courbes $(\mathcal{C})$ *et* $(\mathcal{C}')$*. Dans le graphique ci-dessous , on a tracé la courbe* $(\mathcal{C}')$ *de g . Tracer la courbe* $(\mathcal{C})$ *dans le même repère*

Exercice 4



3. *Soit α un réel non nul appartenant à [-2,2]*
   On désigne par $\mathcal{A}_\alpha$ *l'aire de la partie du plan limitée par les courbes* $(\mathcal{C})$ *et* $(\mathcal{C}')$*. Et les droites d'équations respectives x = 0 et x = α*
   a)Montrer que $\mathcal{A}_\alpha = \int_0^\alpha x\sqrt{4-x^2}dx$*. (On distinguera les deux cas* $\alpha >$ 0 *et* $\alpha < 0)$
   b)Calculer $\mathcal{A}_\alpha$

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

c)Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.

Exercice n°83 : (similitude)

ABCD un losange de centre O tel que et I le milieu de [AB] $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et I le milieu de [AB]

1) Soit f l'isométrie qui transforme A en B ,B en D et D en C.

a- Montrer que f est une symétrie glissante
b- Déterminer la forme réduite de f.
2) a-Montrer qu'il existe un unique déplacement R tel que :R(A)=E et R(D)=B.
b- Caractériser R .
3) Soit $g=S_{(AC)}\circ R$ et $h = t_{\overrightarrow{BC}} o R$
a- Montrer que g est une symétrie orthogonale dont on déterminera l'axe.
b- Déterminer h(C) puis caractériser h.
4) Soit $\varphi=f\circ g^{-1}$
a- Vérifier que $g^{-1}=R^{-1}\circ S_{(AC)}$.
b- Déterminer la nature de φ et ses éléments caractéristiques.

Exercice n°84 : (similitude)

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.On désigne par I le milieu du segment [AB] et par D la droite qui porte la bissectrice intérieure de $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.
1) Soit f la similitude directe qui envoie I en O et B en C.
a) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de f.
b) Montrer que le point A est le centre de f. En déduire la forme réduite de f.
2) Soit R la rotation de centre A et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{4}$.
a) Vérifier que $R = S_{(AC)}\ o\ S_\Delta$.
b) Soit $\sigma = f\ o\ S_\Delta$. Prouver que σ est une similitude indirecte et déterminer sa forme réduite.
3) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$.
Soient $z_A = -1 + i$; $z_C = i\sqrt{2}$; $z_E = 2 - 4i$ et $z_F = 3+2i$ les affixes respectifs des points A, C, E et F.
a) Montrer que la transformation complexe de g qui à tout point M d'affixe z associe le point M'd'affixe z' tel que :$z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\bar{z} - 1 + i(1+\sqrt{2})$ est celle de la symétrie orthogonale d'axe (AC).
b) Montrer que la forme complexe de σ est $z' = (1+ i)\,\bar{z} -1+ 3i$.
4) a) Déterminer l'affixe du point $G = \sigma(E)$, puis vérifier que $\overrightarrow{AF}$et $\overrightarrow{AG}$ sont orthogonaux.
b) On considère un point M d'affixe $z = x + iy$, où $(x, y)\epsilon\ IR^2$.

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014
B.Zouhaier

Montrer que $\overrightarrow{AF}$ t $\overrightarrow{AM'}$ avec M' = σ (M) sont orthogonaux si et seulement si 5x + 3y = -2 .

c) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : 5x + 3y = -2 .

(d) En déduire les points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle [-6, 6] tels que $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AM'}$ sont orthogonaux.

Exercice n°85: (arithmétique)

1) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : 3x – 2y = 1.

2) Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que le couple (14n + 3, 21n + 4) est une solution de (E).

b) En déduire le pgcd (14n + 3, 21n + 4).

3) Soit d le plus grand commun diviseur de 2n + 1 et 21n + 4.

a) Montrer que d = 1 ou d = 13.

b) Montrer que n $\equiv 6$ (mod 13) ssi d = 13.

4) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$A = 21n^2 - 17n - 4$ et $B = 28n3 - 8n^2 - 17n - 3$.

a) Montrer que A et B sont divisibles par n – 1.

b) Déterminer en fonction de n, le pgcd de A et B.

Exercice n°86 : (géométrie dans l'espace)

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1. On désigne par P le centre de gravité du triangle HGF et Q le centre de gravité du triangle FBG et on muni l'espace du repère orthonormé direct (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$)

1) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (BH).

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ACF) est $-x + y + z = 0$

c) Déterminer les points W de la droite (BH) tel que le volume de tétraèdre ACFW est égale à $\frac{11}{6}$

2) Soit K le milieu de [FG] et h l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{3}$

a) Montrer que h(H) =P et h(B) = Q

b) Donner l'expression analytique de h.

3) Soit le plan (R) : $-x + y + z - \frac{1}{3}=0$

a) Montrer que (R) l'image du plan (ACF) par h.

b) Vérifier que (BH) est perpendiculaire à (ACF) en un point N que l'on déterminera les coordonnées.

En déduire que (R) est perpendiculaire à (PQ) en un point N' que l'on déterminera les coordonnées.

c) Donner une équation cartésienne de la sphère S tangente aux plans (R) et (ACF) et dont le centre appartient à la droite (NN').

Exercice n°87 : (analyse)

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014
B.Zouhaier

Soit f la fonction numérique définie par : f(x) = ln(x +$\sqrt{x^2-1}$).
On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
1. a) *Montrer que f est définie sur [1, +∞ [.*
b) *Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement.*
2. a) *Montrer que f est dérivable sur]1, +∞ [et que f '(x)=$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$*
b) *Dresser le tableau de variation de f.*
3. a) *Calculer $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.*
b) *Tracer la courbe (C).*
4. a) *Montrer que f est bijective et tracer, dans le même repère, la courbe (C') de f^{-1}.*
b) *Montrer que pour tout x ϵIR₊ ,f^{-1} (x) = $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$*
5. *L'espace est rapporté à un repère orthonormé*
Soit S le solide obtenu par la rotation de la partie de (C') relative à [0,1] autour de l'axe des abscisses .Calculer le volume de S.
6. *En intégrant par parties, calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives : x=1 et x=2.*

Exercice n°88 : (statistique)

Dans une entreprise , la somme z en dinars réservée au lancement d'un nouveau produit varie en fonction du temps x exprimé e années. En posant y = ln(z), on a obtenu le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5
y_i	13,3	12,9	12,5	12,1	11,7

1. *Représenter dans un repère orthogonal la série (x_i , y_i) par un nuage de points*
2. *a)Déterminer $\overline{X}, \overline{Y}$, σ_X, σ_Y*
   b)Calculer le coefficient de corrélation du couple (X, Y). Interpréter le résultat
3. *Déterminer une équation cartésienne de la droite de régression de Y en X*
4. *Exprimer z en fonction de x et donner une valeur approchée de z quand x vaut 10 années.*

Exercice n°89 :(complexe)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct

On note A le point d'affixe – 2

On considère l'équation (E) : $3z^3 - 2z^2 + 4z + 16 = 0$

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et M,N et P les points d'affixe respectives α ,$\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$

1. *Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ alors les points M,N et P sont alignés.*
   Dans la suite de l'exercice on suppose que α n'apprtient pas $\mathbb{R}$

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

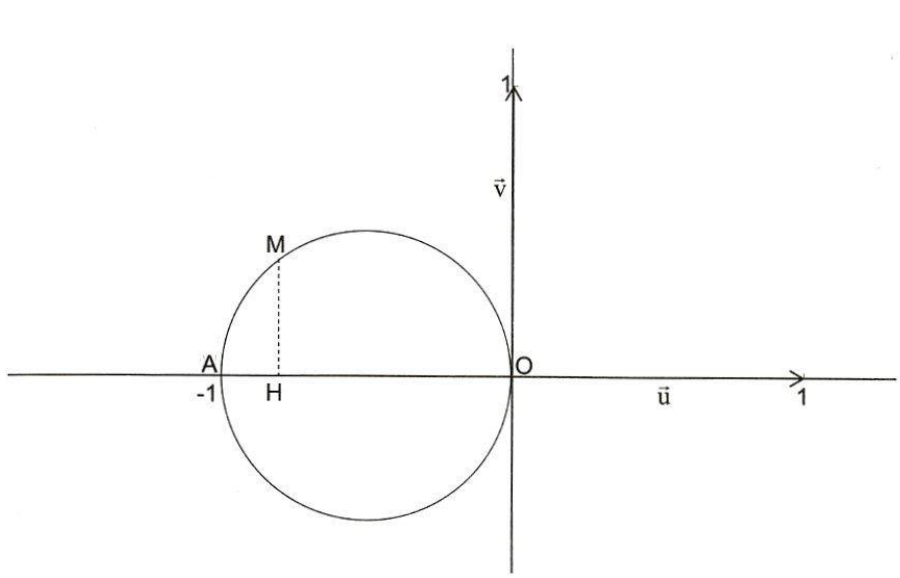
2. Montrer que si MNAP est un parallélogramme alors α est une solution de l'équation (E)
3. Dans cette question on prend $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$
   a)Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes α ,$\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$. Placer dans le repère les points A, M , N et P
   b)Donner l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.
   Montrer que le quadrilatère MNAP est un parallélogramme
4. a) Montrer que si α est une solution de (E) alors $\bar{\alpha}$ est une solution de (E)
   b)En déduire les affixes des points M pour lesquels MNAP est un parallélogramme

Exercice n°90 : (complexe)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct, on considère le point A d'affixe (-1) et les points M,N et P d'affixes respectives z, z^2 et z^3 où z est un nombre complexe non nul différent de (-1) et de 1

1. a)Montrer que (le triangle MNP est rectangle en P) ssi ($\frac{1+z}{z}$ est imaginaire pur)
   b)On pose z = x+iy où x et y sont des réels. Montrer que $\frac{1+z}{z} = \frac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$
   c)En déduire que l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit triangle rectangle en P et le cercle ($\mathcal{C}$) de diamétre [OA], privé des points O et A
2. Dans la figure ,on a tracé le cercle ($\mathcal{C}$) et on a placé un point M d'affixe z sur ($\mathcal{C}$) et son projété orthogonal H sur l'axe des abscisses
   On se propose de construire les points N et P d'affixes respectives z^2 et z^3 tels que le triangle MNP soit rectangle en P

EXERCICE 4 : figure 2



WWW.DEVOIR@T.NET © 2014
Zouhaier

a)Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]$ puis que $\left(\widehat{\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]$

b)Montrer que $OH = OM^2$

c)Donner un procédé de construction des points N et P puis les construire

Exercice n°91 : (similitude)

On considère dans le plan orienté un triangle isocèle ABC de sommet principal A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

On désigne par I le milieu de [BC] et par J le projeté orthogonal de B sur la droite (AC)

Soit f la similitude indirect de centre C qui transforme A en B

1. a)Montrer que le rapport de f est $\sqrt{3}$
   b)Préciser l'axe Δ de f
2. Soit B' = f(B)
   a)Préciser la nature et les éléments caractéristiques de fof
   b)En déduire que $\overrightarrow{CB'} = 3\overrightarrow{CA}$. Construire le point B'
   c)Montrer que BB4= BC
   d)En déduire que f(I) = J
3. Soit $S = foS_{(BC)}$ où $S_{(BC)}$ désigne la symétrie orthogonal d'axe (BC)
   Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S

Exercice n°92 :(complexe)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 +(6+5i)z+2+16i= 0$
2. Soit $f(z) = z^3+ 2(3+2i)z^2+57+10i)z+16 - 2i$
   a)Déterminer le nombre complexe α tel que pour tout nombre complexe z on a: $f(z) = (z - \alpha)\,(z^2+(6 +5i)z+2+16\text{-}2i)$
   b)Résoudre alors l'équation f(z) = 0
3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = i$; $z_B = -4 - 2i$ et $z_C = -2 -3i$ et on désigne par z_I l'affixe du point I le milieu de [AC]
   a)Représenter les points A, B, C et I
   b)Montrer que le triangle ABC est rectangle
4. a)Construire les points D et E tels que BAD et BEC soient des triangles directes rectangles et isocèle en B
   Soient z_D et z_E les affixes respectives de D et de E
   b)Sans calculer z_D et z_E trouver le module et un argument de $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}$ et en déduire que : $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=\frac{z_B-z_E}{z_C-z_B}=i$
   c)Montrer que $\frac{z_D-z_E}{2(z_I-z_B)}=i$

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

d)En déduire que DE = 2BI et (DE) ⊥ (BI)

Exercice n°93 : (géométrie dans l'éspace)

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

On considère le tétraèdre ABCE tel que A(1, 0, 2) , B (0, 0, 1), C(0, -1, 3)

et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

1. *a)Vérifier que E a pour coordonnées (0, 2, 3)*
   b)Calculer le volume du tétraèdre ABCE
2. *a)Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation : x – 2y – z + (= 0. Montrer que $\mathcal{P}$ est parallèle au plan (ABC)*
   b)Soit K le point défini par $2\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$. Calculer les coordonnées du point K et vérifier que K appartient au plan $\mathcal{P}$
3. *Soit h l'homothétie de centre E qui transforme le point C en K*
   a)Déterminer le rapport de h
   b)Le plan $\mathcal{P}$ coupe les arêtes [EA] et [EB] respectivement en I et J .
   Calculer le volume du tétraèdre EIJK.

Exercice n°94 :(complexe, conique, similitude)

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes , l'équation suivante :
$z^3 - 2(1-2i)z^2 + (4-7i)z + 3 + 21i = 0$.
(on cherchera une solution imaginaire pure et on factorisera).
2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct , on donne les points O_1 , E et F ; d'affixes respectives 1+2i , -3i et 2-3i . soit S la similitude directe telle que S (O) = O_1 et S (F) = E .
a) Donner la transformation complexe associée à S.
b) Pour tout M(x, y) d'image M '(x', y ') par S , exprimer x et y à l'aide de x' et y '.
3) caractériser l'ensemble (E) d'équation : $2x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$.
4) On considère l'ensemble (Γ) d'équation : $3y^2 + 3x^2 - 2xy - 14x + 10y - 13 = 0$
a) Montrer que S(E) = (Γ).
b) Montrer que l'image d'une ellipse par une similitude est une ellipse.
c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de (Γ)
d) Tracer dans un même repère (E) et (Γ).

Exercice n°95 : (équation différentielle)

1. *Résoudre l'équation différentielle y'' + y =0*
2. *Soit E l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivable sur ℝ telles que pour tout x ϵ ℝ, f'(x) +* $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$*=0, où f' désigne la fonction dérivée de f*
   a)Soit g la fonction définie sur ℝ par g(x) = cosx
   Vérifier que g est un élément de E
   b)Soit f un élément de E. Vérifier que, pour tout réel x, f''(x) = $f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

c)En déduire que si f est un élément de E alors f est solution de l'équation différentielle y''+y = 0
d)Déterminer alors l'ensemble E

Exercice n°95 : (conique)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct, on considère l'ellipse (E) d'équation $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ *et on désigne par M le point de coordonnées* $(\cos\theta, 2\sin\theta)$ *où* θ *est un réel de* $]0,\frac{\pi}{2}[$

1. *a)Déterminer , par leurs coordonnées, les sommets et les foyers de (E)*
   b)Tracer (E) et placer ses foyers
   c)Vérifier que le point M appartient à (E)
2. *Soit (T) la tangente à (E) en M*
   Montrer qu'une équation de (T) dans un repère orthonormé est
   $2x\cos\theta + y\sin\theta - 2=0$
3. *On désigne respectivement par P et Q les points d'intersection de (T) avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées et on désigne par* $\mathcal{A}$ *l'aire du triangle OPQ*
   a)Montrer que $\mathcal{A} = \frac{2}{\sin(2\theta)}$
   b)En déduire que l'aire $\mathcal{A}$ *est minimale ssi M est le milieu du segment [PQ]*

Exercice n°96 : (arithmétique)

1. *Soit* $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ *l'équation (E) :* $3x - 8y = 5$
   Montrer que les solutions de (E) sont les couples (x,y) tels que $x = 8k - 1$ *et* $y = 3y - 1$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$
2. *a) Soit n, x et y trois entiers tels que* $\begin{cases} n = 3x + 2 \\ n = 8y + 7 \end{cases}$
   Montrer que (x,y) est une solution de (E)
   b)On considère le système (S) $\begin{cases} n \equiv 2(mod 3) \\ n \equiv 7(mod 8) \end{cases}$ *où n est un entier*
   Montrer que n est solution du système (S) ssi $n\equiv 23(mod 24)$
3. *a)Soit k un entier naturel*
   Déterminer le reste de 2^{2k} *modulo 3 et le reste de* 7^{2k} *modulo 8*
   b)Vérifier que 1991 est une solution de (S) et montrer que l'entier $(1991)^{2008} - 1$ *est divisible par 24*

Exercice n°97 : (statistique)

Pour étudier la croissance d'une culture bactérienne en milieu liquide non renouvelé on a mesure, à divers instants t, le nombre x de bactéries par millilitre. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant, où t est exprimé en heures et x est exprimé en milliers

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014
B.Zouhaier

t	0	1	2	3	4	5	6
x	9	11,2	14,8	18	22,8	28,8	36,2

On pose y = lnx où ln désigne logarithme népérien

1. *Recopier et compléter le tableau suivant (On donnera pour y les valeurs arrondies à 10^{-2} prés)*

t	0	1	2	3	4	5	6
y=lnx	2,20	2,42					3,59

b)Déterminer le coefficient de corrélation de la série (y,t)

2. *a)Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite D de régression de y en t*
   b)A partir de l'équation de D déterminer l'expression de x en fonction de t
   c)Donner une estimation du nombre de bactéries par millilitre pour t = 10

Exercice n°98: (suites adjacentes)

On considère les deux suites (x_n) et(y_n) définies par $x_0 = 1$ et $y_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$ et $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < x_n < y_n$.

2. a) Montrer que x est croissante et que y est décroissante.

b) Montrer que les deux suites (x_n) et (y_n) convergent vers la même limite ℓ.

3. a) Montrer que pour tout n, $\in \mathbb{N}$,$x_n \times y_n = 2$.

b) En déduire la valeur de ℓ.

Exercice n°99 :

Dans ce qui suit, x et y désignent des entiers.

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

a) $x^3 \equiv x \pmod 2$.

b) Si $x \equiv 2 \pmod{14}$ alors $x \equiv 1 \pmod 7$.

c) Si $4x \equiv 10y \pmod 5$ alors $x \equiv 0 \pmod 5$.

d) Si $\begin{cases} x \equiv 4 \pmod 5 \\ y \equiv 5 \pmod 8 \end{cases}$ alors $8x - 5y = 7$.

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

Exercice n°100 : (analyse)

I - Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = e^{-x}$ et (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer une équation de la tangente à (Γ) au point d'abscisse 0 .

2) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $1 - x \leq e^{-x} \leq 1$.

b) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq 1 - e^{-x} \leq x$.

II - On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer la limite de f(x) lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que le point I $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2}\right)$ est un point d'inflexion de la courbe ($\mathscr{C}$).

b) Donner une équation de la tangente T à la courbe ($\mathscr{C}$) au point I.

3) Dans la **figure 1** de l'annexe ci-jointe, on a représenté la courbe (Γ) dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Construire I.

b) Construire la tangente T.

c) Tracer la courbe ($\mathscr{C}$).

4) Soit A_k l'aire du domaine plan limité par la courbe ($\mathscr{C}$), la droite d'équation y = 1 et les droites d'équations x = k et x = k + 1 où k est un entier naturel non nul.

a) En utilisant I 2) b) montrer que $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] \leq A_k \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

b) Calculer $\lim\limits_{k \to +\infty} A_k$.

5) Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_k$.

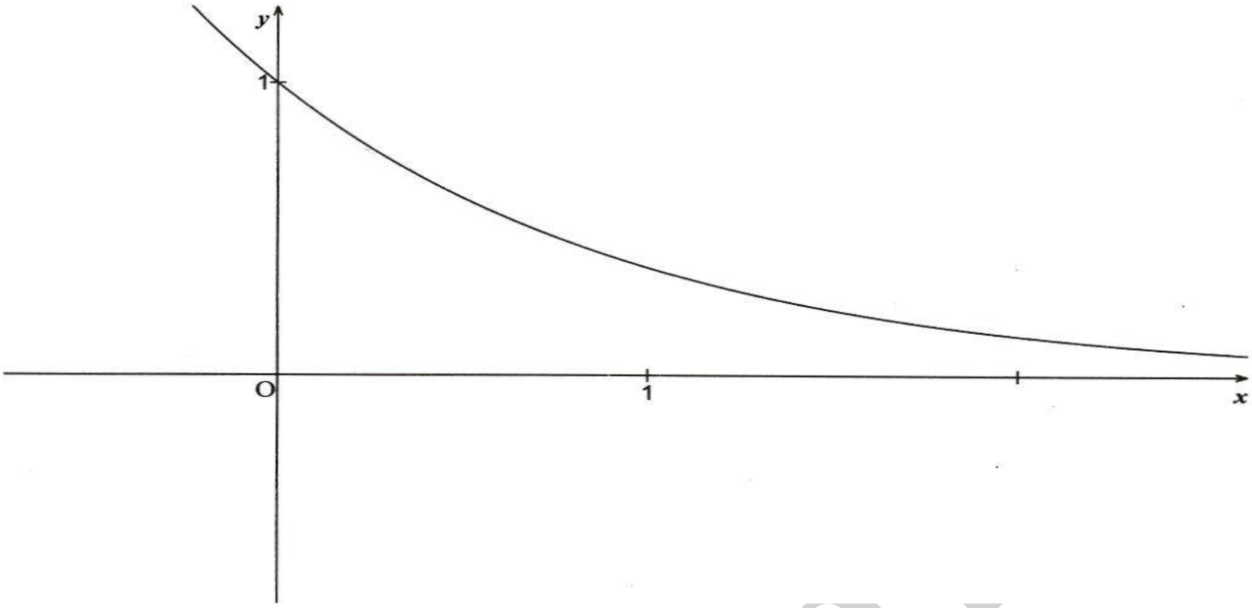
a) Interpréter graphiquement S_n .

b) Montrer que $\ln(n+1) - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{n+1}\right] \leq S_n \leq \ln(n+1)$.

c) En déduire les limites de S_n et de $\frac{S_n}{\ln(n)}$, quand n tend vers l'infini.

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

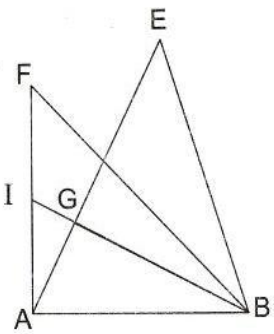
EXERCICE 2 figure1



Exercice n°101 :(similitude)

Dans la figure ci-contre, ABF est un triangle rectangle isocèle tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$,

I est le milieu de [AF] . Les droites (IB) et (AE) se coupent en G et EGB est un triangle rectangle isocèle en G.



1) Soit f la similitude directe de centre B, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Déterminer les images des points E et F par f.
2) Soit g la similitude directe qui envoie A en F et F en B.
   a) Montrer que g est de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.
   b) Déterminer la nature de gog et préciser son rapport et son angle.
   c) Montrer que $\tan\left(\widehat{ABI}\right) = \frac{1}{2}$. En déduire que GB = 2 GA.
   d) En déduire que G est le centre de g.
3) Soit r = gof.
   a) Montrer que r est la rotation de centre F et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
   b) Déterminer r(E). En déduire que EFGH est un carré, où H est le milieu de [EB].

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014