-Lycée : *ELAMEL Fouchana* ***-Classe :*** *4 éme*	***PROBABILITÉS***	***-Prof :*** *B.Zouhaier* ***-Avril*** *2014*

Exercice n°1 : *Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche 5% de ce cheptel*

1. *On choisit au hasard un animal dans le cheptel. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?*
2. *On choisit successivement et au hasard 10 animaux. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'animaux malades parmi eux.*
   a) Calculer l'espérance mathématique de X
   b) On désigne par :
   - *A l'évènement «aucun animal n'est malade parmi les 10».*
   - *B l'évènement «au moins un animal est malade parmi les 10».*
     Calculer les probabilités de A et de B
3. *On sait que la probabilité qu'un animal ait un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0,8. Lorsqu'un animal n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est 0,9. On note*
   - *T l'évènement «avoir un test positif à cette maladie»*
   - *M l'évènement «être atteint de cette maladie».*

   a) Représenter par un arbre pondéré les données de l'énoncé.
   b) Calculer la probabilité de l'évènement T.
   c) Quelle est la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif ?

Exercice n°2 : *Yakine débute un jeu dans lequel elle a autant de chances de gagner ou de perdre la première partie. On admet que , si elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la partie suivant est 0,6 et si elle perd une partie , la probabilité pour qu'elle perde la partie suivante est 0,7. On note, pour n entier naturel ou nul :*

G_n l'événement « Yakine gagne la n'iéme partie »

P_n l'événement « Yakine perd la n'iéme partie »

1. *a)Déterminer les probabilités $p(G_1)$, $p(G_2 / G_1)$ et $p(G_2 / P_1)$. En déduire la probabilité $p(G_2)$*
   b)Calculer $p(P_2)$
2. *On pose , pour n entier naturel non nul, $x_n = p(G_n)$ et $y_n = p(P_n)$*
   a)Déterminer pour n entier naturel non nul les probabilités $p((P_{n+1} / G_n)$ et $p(G_{n+1} / P_n)$
   b)Montrer que pour tout n entier naturel non nul : $\begin{cases} x_{n+1} = 0{,}6x_n + 0{,}3y_n \\ y_{n+1} = 0{,}4x_n + 0{,}7y_n \end{cases}$
3. *Pour n entier naturel non nul , on pose $v_n = x_n + y_n$ et $w_n = 4x_n - 3y_n$*
   a)Montrer que la suite (v_n) est constante de terme général égal à 1
   b)Montrer que la suite (w_n) est géométrique et exprimer w_n en fonction de n
4. *a)Déduire du 3) l'expression de x_n en fonction de n*
   b)Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice n°3: *Un laboratoire de sciences physiques dispose d'un ensemble d'oscilloscopes de même modèle. La durée de vie , en nombre d'années, d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,125.*

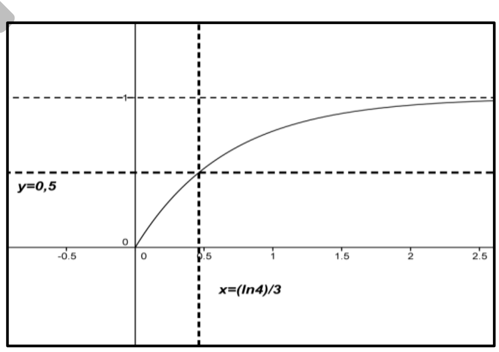
Dans tout l'exercice on donnera les résultats à 10^{-3} prés par défaut.

1. *a)Montrer que $p(X > 10)=0{,}286$*
   b) Calculer la probabilité qu'un oscilloscope ait une durée de vie inférieur à 6 mois
2. *Le responsable du laboratoire veut commander n oscilloscopes ($n \geq 2$)*
   On suppose que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres
   On note p_1 la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans

   a)Exprimer p_1 en fonction de n

   b) Combien d'oscilloscopes, au minimum, devrait commander le responsable pour que p_1 soit supérieur à 0,999 ?

Exercice n°4: *Soit X un variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ . La courbe ci- dessous représente la fonction de répartition de la variable X*



I/ *1 . Interpréter sur le graphique la probabilité $P(X \leq 1)$*

2 . Calculer $\int_0^x \lambda\, e^{-\lambda t} dt$ en déduire la valeur de λ

II/ *Une machine outil fabrique des cylindres. On mesure l'écart, en dixièmes de millimètres, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine.*

On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1{,}5$

- *A : « Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté. »*
- *C : « Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80% des cas. »*
- *R : « Si l'écart est supérieur à 2 , le cylindre est refusé. »*

1 . On prélève au hasard un cylindre dans la production

a)Montrer que la probabilité qu'il soit accepté est égale à 0,915 à 10^{-3} prés.

b) Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification ?

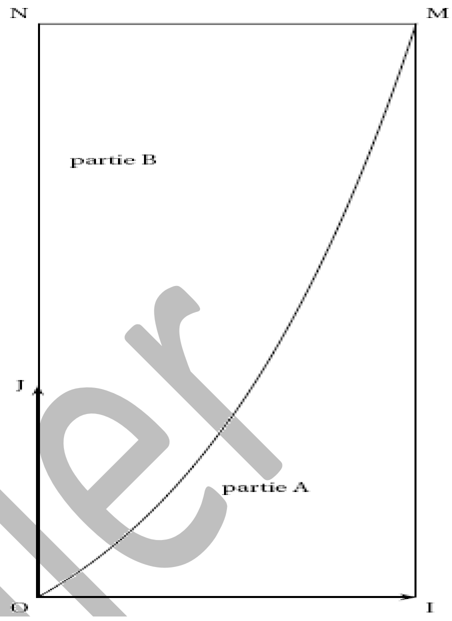
2 . On prélève de manière indépendante dix cylindres de la production. On suppose le nombre de cylindres suffisamment important pour assimiler ce tirage à un tirage successif avec remise.

a)Quelle est la probabilité que dix cylindres soient accepté ?

b)Quelle est la probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé ?

Exercice n°5 :

Première partie Calculer l'intégrale $\int_0^1 xe^x dx$



Deuxième partie La figure ci-dessous représente une cible rectangulaire OIMN telle que, dans le repère orthonormé(o ;$\vec{\imath}$;$\vec{\jmath}$), la ligne courbe (C) reliant le point O au point M est une partie de la courbe représentative de la fonction f définie sur IR par $f(x)= xe^x$. Cette courbe (C) partage la cible OIMN en deux parties A et B comme l'indique la figure ci-dessous.

Un jeu consiste à lancer une fléchette qui atteint soit l'extérieur de la cible, soit l'une des parties A ou B. On admet que la fléchette ne peut atteindre aucune des frontières de la cible, ni la courbe (C) .

Une étude statistique a montré que la fléchette tombe à l'extérieur de la cible avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ et que les probabilités d'atteindre les parties A et B sont proportionnelles à leurs aires respectives.

1. Démontrer que la probabilité d'atteindre la partie A est égale à $\frac{1}{2e}$. Quelle est la probabilité d'atteindre la partie B ?
2. On lance de manière indépendante trois fléchettes.

   a) Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de fléchettes ayant atteint la partie A. Définir la loi de probabilité de X. En déduire la valeur exacte de son espérance mathématique.

   b) Soit E l'événement :« Exactement deux fléchettes atteignent la partie A ». Calculer une valeur approchée au millième de la probabilité de E.

   c) Soit F l'événement : « les trois fléchettes atteignent la partie B ». Calculer la probabilité de F (on donnera la valeur exacte).

   Sachant qu'aucune fléchette n'a atteint l'extérieur de la cible, quelle est la probabilité que toutes les trois se trouvent dans la partie B ?
3. On lance cette fois de manière indépendante n fléchettes.

   a) Déterminer en fonction de n la probabilité p_n pour qu'au moins une des fléchettes atteigne la partie A.

   b)Déterminer le plus petite naturel n tel que $p_n \geq 0,99$

Exercice n°6 :

Deux dés cubiques parfaits sont lancés a la fois

- Si on obtient le même numéro on perd 10 points

- *Si les deux numéros sont de parités différentes on perd 5 points*
- *Dans les autres cas on gagne 15 points*

1. *On désigne par X l'aléa numérique correspondant au nombre de points obtenus après un lancé*
   a)Déterminer la loi de la probabilité de X
   b) Représenter la fonction de répartition de X
2. *L'épreuve précédente est répétée 10 fois de suite, on appelle Y l'aléa numérique le nombre de fois qu'on gagne*
   a)Définir l'événement $(Y = 2)$ et calculer $p(Y = 2)$
   b) Calculer $p(Y \geq 1)$ et $E(Y)$
3. *La même épreuve est répétée n fois de suite ($n \geq 2$)*
   a)Calculer $\lim_{n\to+\infty} p(Y \geq 1)$
   b) Déterminer n pour que $p(Y \geq 1)$ soit supérieur strictement à 0,999

Exercice n°7 :

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.

a) Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ?

b) Quelle est son espérance ?

c) Calculer $P(X = 2)$.

2. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables. Et on lance le dé choisi trois fois de suite.

On considère les événements D et A suivants:

- *D : « le dé choisi est le dé bien équilibré » ;*
- *A : « obtenir exactement deux 6 ».*

a) Calculer la probabilité des événements suivants :

- *« choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » ;*
- *« choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 ».*

(On pourra construire un arbre de probabilité).

b) En déduire que: $p(A) = \frac{7}{48}$.

c) Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?

3. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé n fois de suite (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2). On note B_n l'événement « obtenir au moins un 6 parmi ces n lancers successifs ».

a) Déterminer, en fonction de n, la probabilité p_n de l'événement B_n.

b) Calculer la limite de la suite (p_n). Commenter ce résultat.