Exercice n°1 :

1. Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3x - 8y = 5$.
   Montrer que les solutions de (E) sont les couples (x , y) tels que $x = 8k - 1$ et $y = 3k - 1$
2. a)Soient n , x et y trois entiers tels que $\begin{cases} n = 3x + 2 \\ n = 8y + 7 \end{cases}$.Montrer que (x , y) est une solution de (E).
   b)On considère le système(S)$\begin{cases} n \equiv 2(mod3) \\ n \equiv 7(mod8) \end{cases}$ où n est un entier.
   Montrer que n est solution du système (S) si et seulement si $n \equiv 23(mod24)$
3. a)Soit k un entier naturel. Déterminer le reste de 2^{2k} modulo 3 et le reste de 7^{2k} modulo 8
   b)Vérifier que 1991 est une solution de (S) et montrer que l'entier $1991^{2008} - 1$ est divisible par 24

Exercice n°2 :

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) :$3x + 4y = -8$.

1. a)Vérifier que (0 , -2) est une solution de (E).
   b)Résoudre (E)
2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$,on considère la droite Δ dont une équation est $3x + 4y + 8 =$ et on désigne par A le point de Δ d'abscisse 0.
   a)Montrer que si M est un point de Δ à coordonnées entières alors AM est un multiple de 5.
   b)Soit N un point de Δ de coordonnées (x , y) Vérifier que $AN=\frac{5}{4}|x|$.
   c)En déduire que si AN est un multiple de 5 alors x et y sont des entiers.

Exercice n°3 :

A/ On considère l'équation (E) d'inconnue (n, m) élément de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: $11n - 24m = 1$.
1. Justifier que cette équation admet au moins une solution.
2. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (E).
3. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E).

B/ recherche du P.G.C.D. de $10^{11}-1$ et $10^{24}-1$.
1. Justifier que 9 divise $10^{11}-1$ et $10^{24}-1$.
2. (n, m) désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (E),montrer que $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9$.
3. Montrer que $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$.

Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que :

$(10^{11}-1)N-(10^{24}-1)M = 9$.

4. Montrer que tout diviseur commun à $10^{24}-1$ et $10^{11}-1$ divise 9.
5. Déduire des questions précédentes le P.G.C.D. de $10^{24}-1$ et $10^{11}-1$.

Exercice n°4 :

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

A/ 1. Pour $1 \leq n \leq 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.

2. Démontrer que, pour tout n, $3^{n+6}-3^n$ est divisible par 7.

En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division par 7.

3. À l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7.

4. De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque ?

5. En déduire que, pour tout entier naturel n, 3^n est premier avec 7.

B/ Soit $U_n = 1+3+3^2+\cdots+3^{n-1} = \sum_{i=0}^{i=n-1} 3i$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que si U_n est divisible par 7, alors 3^n-1 est divisible par 7.
2. Réciproquement, montrer que si 3^n-1 est divisible par 7, alors U_n est divisible par7. En déduire les valeurs de n telles que U_n soit divisible par 7.

Exercice n°5 :

1. On considère l'équation (E) : $6x + 7y = 57$, où x et y sont des entiers relatifs.
   a) Déterminer un couple d'entiers relatifs (u,v) tel que : $6u + 7v = 1$.
   En déduire une solution particulière de (E).
   b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).
   Justifier qu'un seul couple d'entiers naturels est solution de (E).
2. Soit le système (S) : $\begin{cases} n \equiv 5(mod 6) \\ n \equiv 6(mod 7) \end{cases}$
   a) Montrer que : (n est solution de (S)) si et seulement si ($n \equiv 41(mod(42)$).
   b) En déduire l'ensemble des solutions de (S).
3. Le but de cette question est de déterminer tous les triplets (x,y,z) d'entiers naturels tels que : $6x+7y+8z=57$.
   a) Montrer que y est impair.
   b) On pose $y = 2p+1$ où $p \in \mathbb{N}$.
   Montrer que le reste de la division euclidienne de p+z par 3 est égal à 1.
   c) On pose $p+z = 3q+1$ où $q \in \mathbb{N}$
   Montrer que les entiers naturels x, p et q vérifient la relation $x+p+4q = 7$.
   En déduire que q prend la valeur 0 ou 1.
   d)Déterminer alors tous les triplets (x,y,z) cherchés.

Exercice n°6 :

1. a)Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation **(E)** : $6X - 5Y = 7$.
   b) Déterminer alors les solutions dans $\mathbb{N}$ du système suivant : $\begin{cases} n \equiv 2[6] \\ n \equiv 9[5] \end{cases}$

c) Déterminer les solutions $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans de l'équation :
$(6X - 5Y - 6)(6X - 5Y + 6) = 13$.

2. On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E') : $6X^2 - 5Y2 = 7$.
   a) Montrer que si (X, Y) est une solution de **(E')** alors $X^2 \equiv 2\ [5]$.
   b) Quel est alors l'ensemble des solutions de **(E')** ?
3. On considère dans $\mathbb{Z}^3$ l'équation **(E'')** : $6X - 5Y - 4Z = 7$.
   a) Montrer que Y est impair .
   b) On pose : $Y = 2p + 1$; $(p \in \mathbb{N})$ .Montrer que $(Z + p)$ est un multiple de 3 .
   c) On pose $Z + p = 3q$; $(q \in \mathbb{N})$.

Montrer que (X , Y , Z) solution de **(E'')** si et seulement si

$$\begin{cases} Y = 2p + 1 \\ Z = 3q - p \qquad (p, q) \epsilon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ X = p + 2q + 2 \end{cases}$$

   d) Retrouver alors les solutions de **(E)** .

Exercice n°7 :

1. Soit (E) l'équation dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: $4x-7y=28$.
   a) Montrer que si (x,y) est une solution de (E) alors $x \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 7)$.
   b) En déduire les solutions de (E).
2. Soit (S) le système défini sur N par : $\begin{cases} x \equiv 3\ (mod\ 4) \\ x \equiv 5 (mod 7) \end{cases}$
   a) Vérifier que 19 est une solution de (S).
   b) En déduire les solutions de (S).
3. a) Déterminer le reste 3^{6k} modulo 4 et le reste 5^{6k} modulo 7.
   b) Montrer que 2007 est une solution de (S).
   c) Montrer que (2007)2010 ≡ 1 (mod 28). En déduire le reste dans la division euclidienne de $(2007)^{2012}$ par 28.

Exercice n°8:

1. a)Déterminer suivant les valeurs de l'entier k, les restes modulo 7 de 2^k.
   b) En déduire le reste modulo 7 de $A = 8^{1001} + 2^{3004}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{4n+2} - 4^{n+2} \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 7)$.
3. Soit l'équation (E_1) : $6x - 5y = 7$.
   a) Montrer que si (x,y) est solution de (E_1) alors $x \equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 5)$.
   b) Résoudre alors l'équation (E_1) .
4. Soit l'équation (E_2) : $138x - 55y = 5$ où $(x,y) \epsilon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Pour tout entier n, on considère les nombres : $a = 55n + 10$ et $b = 138n + 25$.
   a) Vérifier que pour tout entier n, le couple (a,b) est solution de (E_2) .
   b) En déduire les valeurs possibles de $a \wedge b$.
   c) Déterminer l'ensemble des entiers n tels que $a \wedge b = 5$.

Exercice n°9 :

A/Cocher la réponse exacte en justifiant la réponse :
1. a) $2013^{62} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 5)$; b) $2013^{62} \equiv 4(\mathrm{mod}\ 13)$; c) $2013^{62} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 13)$.
2. Soit n un entier tel que : $(11n) \wedge (112 \times 52 \times 132) = 143$ alors :

a) $n \equiv 0 (\bmod 13)$; *b) $n \equiv 0 (\bmod 11)$;* *c) $n \equiv 0 (\bmod 5)$.*

3. *soit n un entier tel que $n \equiv 19 (\bmod 20)$ alors le reste modulo 20 de $n^{100} + n^{181}$ est :*

   a) 19 ; *b) 2 ;* *c) 0.*

4. *Le reste modulo 5 de $(2222)^{3333} + (3333)^{2222}$ est :*

   a) 0 ; *b) 1 ;* *c) 4.*

***B**/Répondre par « Vrai » ou « Faux », en justifiant :*

1. $2011^{2012} \equiv 2 (\bmod 12)$.
2. $3^{2012}+4^{2012}+5^{2012} \equiv 3 (\bmod 7)$.
3. $4^{2n}+(-1)^{n+1} \equiv 0 (\bmod 17)$.
4. *L'équation $8x \equiv 3 (\bmod 12)$ admet des solutions dans Z.*

Exercice n°10:

1. *Etudier suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de 5^n par 7.*
2. *Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = 1+5+5^2+\ldots\ldots+5^n$.*

   a)Montrer que : $4S_n = 5^{n+1} - 1$

   b)Soit a un entier, montrer que : $4S_n \equiv a \ (\bmod 7)$ si et seulement si $S_n \equiv 2a \ (\bmod 7)$

   c) En déduire le reste de la division euclidienne de S_{2010} par 7.

3. *Soit n un entier naturel donné.*

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ les équations(E_0) : $5^n x - S^n y = 0$ et (E) : $5^n x - S^n y = 7$

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, S_n et 5^n sont premiers entre eux.

b) Résoudre l'équation (E_0) .

c) Montrer que les solutions de (E) sont les couples (x, y) tels que $x = 35+ kS_n$ et $y = 28+ k5^n$ avec k $\mathbb{Z}$.

4. *Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ le système* $\begin{cases} 25x - 31y = 7 \\ x \wedge y = 7 \end{cases}$