

« C'est par ce que la terre est une sphère que tout ce qu'elle

engendre débouche sur des cercles vicieux » Jacques Sternberg

Exercice n°1 (OCM) :

Cocher la bonne réponse.

- A) Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1 . On munit l'espace du RON $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
- 1) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH}$ est égal à : a) 0 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$.
 - 2) Une équation du plan (ECG) est :
a) $x + y - 2 = 0$ b) $x + y - 1 = 0$ c) $x - y = 0$.
 - 3) Soit $I = E * G$ et S la sphère de centre I et passant par F alors on a :
a) Le plan (BEG) est tangent à S.
b) L'intersection de S et le plan (BEG) est le cercle de diamètre [EG].
c) L'intersection de S et le plan (BEG) est le cercle circonscrit au triangle EGH.
- B) L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le plan P d'équation : $2x + y - 2z + 1 = 0$ et le point A (2,1,0). Soit S la sphère de centre A et sécante à P suivant le cercle (C) de rayon $\sqrt{5}$; et S' la sphère de centre A et tangente à P.
- 1) Le rayon R de S est :
a) $R = \frac{7}{3}$ b) $R = 3$ c) $R = 1$ d) $R = \sqrt{\frac{61}{5}}$.
 - 2) Le centre I de (C) est :
a) $I(0, -1, 0)$ b) $I\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ c) $I\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ d) $I\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$.
 - 3) a) Il n'existe aucune homothétie de centre A transformant S en S' .
b) Il existe une seule homothétie de centre A transformant S en S' .
c) Il existe plusieurs homothétie de centre A transformant S en S' .

Exercice n°2 :

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points : $A(2 ; 1 ; -1)$, $B(-1 ; 2 ; 4)$, $C(0 ; -2 ; 3)$, $D(1 ; 1 ; -2)$ et le plan (P) d'équation $x - 2y + z + 1 = 0$. Pour chacune des huit affirmations suivantes, dire, avec justification, si elle est vraie ou si elle est fausse.

- 1) **Affirmation 1 :** les points A, B et C définissent un plan.
- 2) **Affirmation 2 :** la droite (AC) est incluse dans le plan (P).
- 3) **Affirmation 3 :** une équation cartésienne du plan (ABD) est : $x + 8y - z - 11 = 0$.
- 4) **Affirmation 4 :** une représentation paramétrique de la droite (AC) est :
$$\begin{cases} x = 2\alpha \\ y = 2 + 3\alpha \\ z = 3 - 4\alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R} .$$
- 5) **Affirmation 5 :** les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
- 6) **Affirmation 6 :** la distance du point C au plan (P) est égale à $4\sqrt{6}$.
- 7) **Affirmation 7 :** la sphère de centre D et de rayon $\frac{\sqrt{6}}{3}$ est tangente au plan (P).

- 8) **Affirmation 8** : le point $E\left(-\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan (P) .
- 9) **Affirmation 9** : La transformation qui, à tout point M de l'espace associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ est l'homothétie de centre $G = \text{Bpp}\{(A,1);(B,1);(C,2)\}$ et de rapport 3.

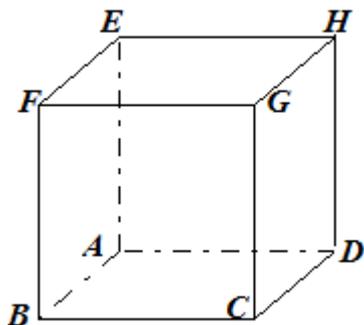
Exercice n°3 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit les points $A(3,2,4)$, $B(0,3,5)$, $C(0,2,1)$ et $D(3,1,0)$.

- 1) a) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$.
d) Montrer que ABCD est un parallélogramme.
e) Calculer l'aire du parallélogramme.
- 2) a) Soit E le point défini par : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD})$. Déterminer les coordonnées de E .
b) Calculer le volume du tétraèdre ABED.
- 3) a) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DE}$.
b) Calculer l'aire du triangle BDE. En déduire la distance du point A au plan (DBE) .

Exercice n°4 :

Soit le cube ABCDEFGH, l'espace est orienté par le repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



- 1) Déterminer les coordonnées de vecteur $\overrightarrow{BG} \wedge \overrightarrow{BE}$. En déduire l'aire du triangle BGE.
- 2) Calculer le volume du tétraèdre DBGE. En déduire la distance du point D au plan (BEG)
- 3) Soient I et K les points définis par : $I = E * F$ et K centre du carré ADHE.
a) Préciser les coordonnées des points I et K .
b) Soit Δ la droite passant par le point K et de vecteur directeur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AE}$ déterminer $d(I, \Delta)$.

Exercice n°5 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(3,1,0)$, $B(1,2,0)$, $C(3,2,1)$ et $D(0,0,d)$ où d désigne un réel positif ou nul.

- 1) On pose $\vec{N} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Calculer les coordonnées de \vec{N} . En déduire l'aire de triangle ABC.
- 2) a) Vérifier que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
b) Montrer que le volume du tétraèdre ABCD est $V_d = \frac{2d+5}{6}$.
c) Déterminer pour quelle valeur de d la droite (DB) est perpendiculaire au plan (ABC) .

Exercice n°6 :

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé de sens direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$, on considère le cube JOIRNKLM. On note A le milieu de l'arête [IL] et B le point défini par : $\overrightarrow{KB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KN}$.

On appelle P le plan passant par les points O, A et B.

- 1) a) Préciser les coordonnées des points A et B.
b) Déterminer les coordonnées d'un vecteur \vec{u} orthogonal à \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OB} .
- 2) a) Montrer que l'aire du triangle OAB vaut $\frac{\sqrt{14}}{6}$.
b) Le point $C\left(1; \frac{1}{3}; 1\right)$ appartient-il à P ? Justifier votre réponse.
- 3) On considère le tétraèdre OABK. Montrer que son volume vaut $\frac{1}{9}$.. En déduire la distance du point K au plan P.

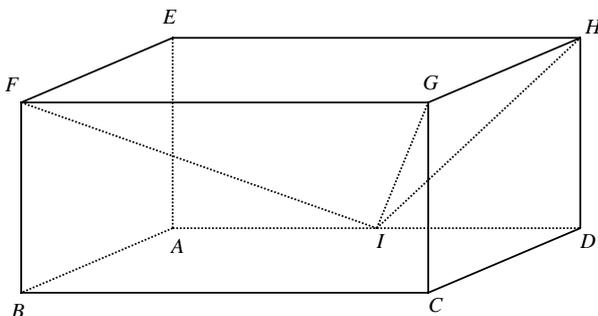
Exercice n°7 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $A(3, 2, -1)$ et $H(1, -1, 3)$.

- 1) Déterminer une équation de plan P passant par H orthogonal à (AH).
- 2) On donne les points $B(-6, 1, 1)$, $C(4, -3, 3)$ et $D(-1, -5, -1)$.
 - a) Montrer que les points B, C et D appartiennent au plan P.
 - b) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$.
- 3) a) Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à $5\sqrt{29}$.
b) Montrer que le volume du tétraèdre ABCD est égale à $\frac{145}{3}$.
- 4) a) Calculer l'aire de ABC.
b) Calculer la distance du point D au plan (ABC).

Exercice n°8 :

Une unité de longueur étant choisie dans l'espace, on considère un pavé droit ABCDEFGH tel que : $AB = 1$, $AD = 2$ et $AE = 1$. On appelle I le milieu de [AD]. L'espace est muni du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AE})$.



- 1) Déterminer, dans le repère choisi, les coordonnées des points F, G, H.

- 2) a) Montrer que le volume V du tétraèdre $GFIH$ est égal à $\frac{1}{3}$.
- b) Montrer que le triangle FIH est rectangle en I . En exprimant V d'une autre façon, calculer la distance d du point G au plan (FIH) .
- 3) Soit le vecteur \vec{n} de coordonnées $(2 ; 1 ; -1)$.
- a) Montrer que le vecteur \vec{n} est normal au plan (FIH) .
- b) En déduire une équation cartésienne du plan (FIH) .
- c) Retrouver par une autre méthode la distance d du point G au plan (FIH) .
- 4) a) La droite (AG) est-elle perpendiculaire au plan (FIH) ?
- b) Donner un système d'équations paramétriques de cette droite.
- c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de (AG) et de (FIH) .

Exercice n°9 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la sphère (S) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 8 = 0$ et le plan P d'équation $x + 2y + z - 6 = 0$.

- 1) a) Déterminer le centre et le rayon de la sphère (S) .
- b) Montrer que P coupe (S) suivant un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.
- 2) On donne les points $A(2,0,2)$ et $B(2,2,0)$.
- a) Vérifier que $A \in (S)$ et n'appartient pas au plan P et que B appartient à (C) .
- b) Soit Q l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tel que $MA = MB$. Montrer que Q est le plan d'équation $y = z$.
- c) Montrer que P et Q se coupe suivant une droite Δ dont une représentation graphique est :
- $$\begin{cases} x = 6 - 3\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} .$$
- 3) Déterminer un point C du cercle (C) tel que ABC est un triangle équilatéral.

Exercice n°10 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(6,0,0)$, $B(0,6,0)$, $C(0,0,6)$ et $D(-2,-2,-2)$.

- 1) a) Vérifier que les points A, B et C déterminent un plan.
- b) Donner une équation cartésienne du plan P .
- 2) a) Vérifier que la droite $(OD) \perp P$.
- b) Donner la représentation paramétrique de la droite (OD) .
- 3) Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan P . Vérifier que H a pour coordonnées $(2,2,2)$ et qu'il est équidistant de A, B et C . En déduire que (OD) est l'axe de (C) cercle circonscrit au triangle ABC .
- 4) Soit Q le plan médiateur du segment $[CD]$.
- a) Montrer qu'une équation cartésienne de Q est : $x + y + 4z - 6 = 0$.
- b) Montrer que (OD) coupe Q en un point Ω dont on précisera les coordonnées.
- 5) Soit S la sphère de centre Ω et de rayon $3\sqrt{3}$.
- a) Ecrire une équation cartésienne de S .
- b) Vérifier que S passe par A, B, C et D .
- c) Quel est l'intersection de S et P .

Exercice n°11 :

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1. On munit l'espace d'un repère orthonormé $(A, \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$.

Soit I = B * F et J le point tel que $\overline{EJ} = \frac{2}{3} \overline{EH}$.

- 1) a) Déterminer les coordonnées des points I et J et du vecteur $\vec{u} = \overline{AI} \wedge \overline{AJ}$.
b) Montrer que l'aire de AIJ est $\frac{\sqrt{14}}{3}$.
- 2) Montrer que le volume du tétraèdre AIJE est $\frac{1}{9}$ puis en déduire la distance du point E au plan AIJ.
- 3) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (AIJ) est : $x + 3y - 2z = 0$ et retrouver la distance du point E au plan AIJ.
- 4) Soit S l'ensemble des points M(x,y,z) tel que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 2 = 0$.
 - a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.
 - b) Montrer que S et (AIJ) sont sécants suivant un cercle que l'on précisera.

Exercice n°12 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A(6,0,0) B(0,-6,0) , C(0,0,3)

et soit S la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - x + y - 2z = 12$.

- 1) a) Déterminer une équation du plan P passant par A,B et C.
b) Déterminer le centre I de S et calculer son rayon.
c) Montrer que S et P sont sécants suivant un cercle dont on déterminera le centre H et le rayon.
- 2) a) Vérifier que le point K (-1,1,-2) est un point de S.
b) Déterminer une équation du plan Q tangent à S en K.
c) Vérifier que P et Q sont parallèles.

Exercice n°13 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit S = $\{M(x, y, z) \text{ tel que } ; x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z + 5 = 0\}$.

- 1) Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre Ω et le rayon R.
- 2) Soit P le plan d'équation : $x - 2y + 2z + 2 = 0$.
 - a) Montrer que l'intersection de la sphère S et du plan P est un cercle (C).
 - b) Déterminer les coordonnées du centre A et le rayon r du cercle (C).
- 3) a) Soit M (a,b,-1) un point de la sphère S où a et b sont deux réels et Q le plan d'équation : $(a-1)x + (b+2)y + z - a + 2b + 3 = 0$.
 - a) Montrer que M appartient au plan Q.
 - b) Montrer que S et Q sont tangents en M.

Exercice n°14 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit les points A(1,2,1) B(2,2,0), C(0,4,1) et D(3,2,2).

- 1) a) Déterminer $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ puis déduire l'aire du triangle ABC.
 b) Soit P le plan contenant les points A,B et C. Montrer que P a pour équation $2x + y + 2z - 6 = 0$.
 c) Calculer $d(D,P)$.
- 2) Soit h l'homothétie de centre D et de rapport 2 et $S' = h(S)$.
 a) Préciser le rayon et le centre de S' .
 b) Déduire que P coupe S' suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice n°15 :

L'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit les points A(0,4,1) B(-2,4,5), C(1,1,5) et D(0,0,1).

- 1) a) Donner une équation cartésienne du plan P=(ABC).
 b) Vérifier que ABCD est un tétraèdre.
 c) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.
- 2) Soit S la sphère de diamètre [BD]. Donner une équation de la sphère S ; soit I son centre .
- 3) a) Déterminer les homothéties de centre D qui transforment la sphère S en une sphère S' tangente à P.
 b) Soit I' le centre de S' . Exprimer le volume V' du tétraèdre I'ABC en fonction de V le volume du tétraèdre ABC .
 c) Montrer que le plan P coupe S suivant un cercle ζ dont on précisera le rayon.
 d) Soit h l'homothétie de centre C et qui transforme Ω' en Ω avec Ω' est le centre de ζ .
 Montrer que $h(A) = \Omega'$

Exercice n°16 :

L'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit les points A(-2,1,1) B(2,0,-2), C(2,1,-1).

- 1) a) Déterminer le vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$
- 2) b) En déduire q'une équation cartésienne du plan P =(ABC) est $x - 2y + 2z + 2 = 0$.
- 3) Soit $S = \{M(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z + 5 = 0\}$.
- 4) a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R.
- 5) b) Montrer $S \cap P$ est un cercle que l'on caractérisera.
- 6) Soit h l'application de l'espace dans lui-même, qui à tout point M(x,y,z) associe le point :

$$M'(x', y', z') \text{ tel que } \begin{cases} x' = -2x + 3 \\ y' = -2y - 6 \\ z' = -2z - 6 \end{cases}$$

- a) Montrer que h est une homothétie de centre I dont on déterminera le rapport.
- b) Donner une équation cartésienne du plan P' image de P par h.
- c) Quelle est la position relatives de P' et S.
- d) Calculer le volume du tétraèdre ABCI et en déduire le volume de son image par h.