**Prof : Mr Khammour.K** **Série n°16 : « Coniques »** **$4^{ème}$ Math** **Mars 2015**

## Exercice n°1 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les courbes :

$P_1 : y^2 = 8x$, $P_2 : x^2 = 4y$ , $P_3 : y^2 = -6x$ , $P_4 : \left|\dfrac{z+i\bar{z}}{2}\right| = \left|z - \dfrac{1}{2}(1+i)\right|$,

$P_5 : y^2 + 2y - 6x + 10 = 0$ et $P_5 : x^2 - 4x + 2y - 2 = 0$.Reconnaitre la nature et caractériser chacune de ces courbes.

## Exercice n°2 :

Soit OAB un triangle isocèle et rectangle en O tel que AB = 4cm. On note I le milieu de [AB] et F le point défini par : $\overrightarrow{OF} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{OI}$. Soit P la parabole de foyer F et de sommet O. On munit le plan du repère orthonormé $R\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ tel que $\vec{i} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OI}$.

1) a) Montrer que dans R , P a pour équation : $y^2 = 2x$.
   b) Déterminer les coordonnées du point A ; En déduire que P passe par A et B.
   c) La tangente à P en A coupe (OI) en un point J. Montrer que O est le milieu de [IJ].
2) Soit $M(x_1, y_1)$ un point de P distinct de O. La perpendiculaire à (OM) en O recoupe P en un point $N(x_2, y_2)$ .
   On suppose que (MN) a pour équation : x = ay + b.
   a) Montrer que $y_1$ et $y_2$ sont les solutions de l'équation $y^2 - 2ay - 2b = 0$.
   b) En remarquant que $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = 0$ , montrer que b = 2.
   c) En déduire que lorsque M varie sur P, (MN) passe par un point fixe.

## Exercice n°3 :

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) Soit $(P_0)$ la parabole d'équation : $y^2 = 4x - 4$.
   a) Déterminer le foyer et la directrice de $(P_0)$ puis tracer $(P_0)$.
   b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la parabole $(P_0)$ et la droite d'équation x = 3.
2) Soit F (a,b) un point du plan tels que a>0 et soit P la parabole de foyer F et de directrice la droite des ordonnées.
   a) Prouver qu'une équation de (P) est $(y- b)^2 = 2ax - a^2$.
   b) Montrer que (P) passe par le point A(1,0) si et seulement si F appartient au cercle (C) de centre A et de rayon 1 privé du point O.
   c) Soit S le sommet de la parabole (P). Déterminer et construire l'ensemble des points S lorsque F décrit le cercle (C) privé de O.

## Exercice n°4 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Soit P la parabole de foyer O et de directrice la droite d'équation x = -2.

1) a) Montrer qu'une équation cartésienne de (P) est : $y^2 = 4x + 4$.
   b) Tracer la parabole (P) , on désignera par S son sommet.
2) Soit le point $A\left(-2, \dfrac{3}{2}\right)$.

a) Déterminer par leurs équations , les tangentes à (P) issues de A. On notera $T_1$ et $T_2$ ces tangentes, $M_1$ et $M_2$ leurs points de contact respectifs avec (P).
b) Tracer $T_1$ et $T_2$ montrer qu'elles sont perpendiculaires et que les points O,$M_1$ et $M_2$ sont alignés.

3) Soit M un point de (P) d'affixe : $z = re^{i\theta}$ ou $r \in IR_+^*$.
a) Prouver que $\theta \neq 0[2\pi]$.
b) Montrer que $r = \dfrac{2}{1-\cos\theta}$.

4) Soit M un point de (P) distinct de (S) , la droite (OM) coupe (P) en M'.
a) Déterminer la valeur minimale de la distance MM'.
b) Soient N et N' les projetés orthogonaux respectifs de M et M' sur l'axe de (P). Montrer que la valeur du produit MN.M'N' est une constante que l'on précisera.

**Exercice n°5 :**

Définir l'ensemble des points M(z) vérifiant : $z\bar{z} + 3\left(z^2 + \overline{z^2}\right) = 1$.

**Exercice n°6 :**

1) Démontrer que l'ensemble (C) des points M, d'affixe z tels que $\left|z + 2\bar{z} + 1\right| = \sqrt{3}\left|z + \bar{z}\right|$ est une conique.
2) Déterminer la nature de (C).Préciser ses directrices. Tracer (C) en mettant en évidence les éléments précédents.

**Exercice n°7 :**

Soit u un nombre complexe et ($E_u$) l'équation : $z^2 - \left(2u - i\bar{u}\right)z - 2iu.\bar{u} = 0$.

1) Résoudre l'équation ($E_u$) dans C.
2) On rapporte le plan au repère orthonormé direct $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$ et on désigne par A(2i) , M(u) , M'(z') et M''(z'').

Soit (H) l'ensemble des points M tels que les points A,M' et M'' sont alignés.
a) Trouver une équation cartésienne de (H).
b) Montrer que l'ensemble (H) est une hyperbole dont on précisera le centre les sommets , les foyers et les asymptotes.
c) Vérifier que (H) passe par le point O et donner une équation cartésienne de la tangente è (H) en O. Tracer (H).

**Exercice n°8 :**

A tout points M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z tel que : $z = (3+2i)z + 3i\bar{z} - 1$.

1) Démontrer que l'ensemble $(\Gamma)$ des points M tels que O,M et M' soient alignés est une conique.
2) Déterminer la nature de $(\Gamma)$.Préciser ses éléments remarquables. Tracer $(\Gamma)$en mettant en évidence les éléments précédents.

**Exercice n°9 :**

Soit $\alpha$ un nombre réel de $]0, \pi[$.

1) Résoudre l'équation $(E): \sin^2 \alpha z^2 - 4z\sin\alpha + 4 + \cos^2 \alpha = 0$.
2) Soit M' et M'' les images des solutions de (E) dans le plan complexe.
   a) Déterminer lorsque $\alpha$ varie dans $]0, \pi[$ l'ensemble des points M' et M'' est une branche d'une hyperbole (H).
   b) Préciser les sommets , les foyers , les asymptotes de (H).
   c) Dessiner (H) en mettant en évidence les éléments précédentes.

**Exercice n°10 :**

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct du plan. Soit E la courbe d'équation : $12x^2 + 16y^2 + 12x - 9 = 0$.

1) a) Montrer que E est une ellipse. Préciser son excentricité, son centre et ses sommets principaux.
   b) Montrer que O est un foyer de E.
   c) Tracer E.
2) Soit M un point de E d'abscisse x. On pose $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \equiv \alpha[2\pi]$ où $\alpha \in ]-\pi, \pi]$.
   a) Montrer que OM = $\dfrac{3-2x}{4}$.
   b) En déduire que OM = $\dfrac{3}{2(2+\cos\alpha)}$.
3) La droite (OM) recoupe E en un point N.
   a) Montrer que MN = $\dfrac{6}{4-\cos^2\alpha}$.
   b) Déterminer les valeurs de $\alpha$ pour lesquelles MN est minimale.

**Exercice n°11 :**

Discuter en fonction du paramètre m, la nature géométrique de l'ensemble $C_m$ des points du plan tels que :

$(m+1)x^2 + (2m-1)y^2 + 2mx + \dfrac{m}{2} = 0.$

**Exercice n°12 :**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) On considère la courbe (C) d'équation : $x^2 + 4y^2 = 1$.
   a) Déterminer la nature de (C) et ses éléments caractéristiques.
   b) Tracer (C).
2) On considère les droites D et D' d'équations respectives $x = 1$ et $x = -1$ et le point F($\frac{\sqrt{3}}{2}$,0).

   Soit $M_0$ le point de (C) tel que $M_0\left(\cos\theta, \frac{1}{2}\sin\theta\right)$ avec $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
   a) Ecrire l'équation de la tangente T à la courbe (C) en $M_0$.
   b) La tangente T coupe les droites D et D' respectivement en k et k'.Calculer $\overrightarrow{FK}.\overrightarrow{FK'}$.
   En déduire que le triangle KFK' est rectangle.

**Exercice n°13 :**

Déterminer l'excentricité d'une hyperbole dont les asymptotes sont perpendiculaires.

## Exercice n°14 :

Soit $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct. A tout point M d'affixe $z \neq 0$ on associe le point M' d'affixe $z'$ tel que

$z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

1) On pose $z = x + iy$ ou $(x, y) \in \mathrm{IR}^2$.
   a) Exprimer $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et $y$.
   b) Déterminer l'ensemble (E) des points M(z) tels que M'$\in (O, \vec{u})$.
2) On suppose que M décrit le cercle de centre O et de rayon 2,on écrit alors $z = 2e^{i\theta}$ où $\theta \in [0, 2\pi[$.
   a) Exprimer $x'$ et $y'$ en fonction de $\theta$.
   b) En déduire que M' décrit une conique dont on précisera le centre et les sommets.

## Exercice n°15 :

Soit OAB un triangle rectangle et isocèle en O tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et OA=OB=2. On pose I=O*A ,J=O*B et K=A*B et soit S la similitude directe tel que S(A)=K et S(K)=J.

1) a) Déterminer le rapport et l'angle de S.
   b) Montrer que O est le centre de S.
   c) Déterminer la transformation complexe associés à S dans un repère R $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.
2) Soit P la courbe d'équation $x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4y = 0$ selon le repère R et P'=S(P).
   a) Déterminer l'expression analytique de S dans R.
   b) Déterminer alors une équation cartésienne de (P') dans R et montrer que (P') est une parabole dont on précisera le foyer et la directrice.

## Exercice n°16 :

Soit $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct du plan.

1) a) Déterminer l'ensemble E des points M de P d'affixe z vérifiant : $10z\bar{z} + z(z^2 + \bar{z}^2) = 4$.
   b) Préciser ses foyers et ses directrices.
2) Soit f la composée d'une homothétie de centre O, de rapport2 et d'une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
3) Déterminer l'équation E' image de E par f.
   Montrer que E' est une ellipse de Foyers f(F) et f(F'). F et F' étant les foyers de E. Comparer les excentricités de E et E'.
4) Construire dans le même repère E et E'.

## Exercice n°17 :

On considère la courbe $\mathscr{H}$ d'équation : $x^2 - 4y^2 + 4x + 8y - 4 = 0$. Montrer que $\mathscr{H}$ est une conique dont on déterminera l'excentricité, les foyers, les sommets et les directrices.

## Exercice n°18 :

Soit E l'ensemble des points M(x,y,z) tels que : $9x^2 + 8y^2 + 18x - 16y - 11 = 0$.Montrer que E est une ellipse dont on déterminera l'excentricité, les foyers, les sommets et les directrices.