''*L'amitié est la similitude des âmes* ''Alcuin

Exercice n°1 :

Répondre par vrai ou faux.

1) f est une similitude directe de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   a) fof est une homothétie de rapport 3.
   b) fof est une homothétie de rapport -3.
2) Soit ABCD un carré de centre O. Soit M,N,P et Q les milieux respectifs des cotés [AB] , [BC] , [CD] et [AD]. Soit E l'ensemble des similitudes directes qui envoie ABCD en MNPQ.
   a) Tous les éléments de E fixent le même point.
   b) Tous les éléments de E ont le même rapport.
   c) E contient exactement quatre éléments.
3) Soit f_a l'application du plan dans lui-même qui à tout point M(z) on associe le point M'(z') tel que :
   $z' = ia + \frac{i}{a}(z - ia)$ $a \in IR_+^*$ alors : $f_{\frac{1}{a}} \circ f_{-a}$ est une translation .
4) ABCD est un carré direct de centre O f la similitude définie par :f = $h_{\left(O,-\frac{1}{2}\right)} \circ S_{(AC)}$ alors f est la similitude indirecte de rapport $\frac{1}{2}$, de centre O et d'axe (AC).
5) Soit f la transformation qui à M(z) associe M'(z') telle que : $z' = 2i\bar{z} - 1 - i$ et $I(1+i)$, f est une similitude indirecte de rapport 2 de centre I et d'axe Δ : x + 2y – 3=0

Exercice n°2 :

Soit ABC un triangle rectangle isocèle direct de sommet principal A. On note D = S_C(A) et σ la similitude directe qui transforme D en C et C en B.

1) a) Expliquer pourquoi σ admet un centre que l'on nommera Ω.
   b) Déterminer le rapport et l'angle de σ .
2) Quel est l'image de la droite (AC) par σ .
3) Démontrer que le triangle ΩBC est rectangle isocèle. En déduire une construction géométrique de Ω.

Exercice n°3 :

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit D le symétrique de C par rapport à A.

Soit f la similitude qui envoie sur B et B sur D.

1) a) Faire une figure.
   b) Calculer le rapport et l'angle de f.
   c) Montrer que f(D) = C.
2) On désigne par O le centre de f.
   a) Déterminer fof.
   b) En déduire une construction de O. Justifier.

3) Soit ξ_1 et ξ_2 les cercles de diamètres respectifs [OA] et [OB] et soit K leur second point d'intersection. (AC) recoupe ξ_1 en I et (BC) recoupe ξ_2 en J.
   a) Montrer que K$\in$ (AB).
   b) Montrer que f(I) = J.
   c) Prouver alors que I,J et K sont alignés.

<u>Exercice n°4 :</u>

Dans le plan orienté , on considère un rectangle ABCD tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et AB = 2 AD , I = A*B , O=B*D et ξ le cercle circonscrit au rectangle ABCD. Soit f la similitude directe qui transforme B en I et I en D.

1) Déterminer le rapport de f et un mesure de son angle.
2) Soit S = $S_{\left(C,\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right)}$.
   a) Montrer que S (B) = I.
   b) Montrer que foS^{-1}=I_{dp}.
   c) En déduire que f = S.
3) Soit A' = f(A) montrer que D = A'*I construire alors le point A'.
4) La demi droite [CA') recoupe ξ en O'.
   a) Calculer CO' et CA' en fonction de CA.
   b) En déduire que O' est le milieu de [CA'].
   c) Prouver que O' = f(O).

<u>Exercice n°5 :</u>

On donne deux triangles ABC et ACD rectangles et isocèle tels que $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par I = D*C et J = C*B.

1) Soit f la similitude directe de centre A qui transforme D en C.
   a) Déterminer le rapport et l'angle de f.
   b) Montrer que f(C)=B et f(I) = J.
2) Soit g la similitude directe tel que g(C) = B et g(B) = A.
   a) Déterminer le rapport et l'angle de g.
   b) On désigne par Ω le centre de g. Déterminer gog (C) caractériser gog et en déduire que $(\Omega A)\perp(\Omega C)$.
   c) Montrer que $(\Omega J)\perp(\Omega C)$.
   d) En déduire que Ω et le projeté orthogonal de C sur (AJ).
3) Caractériser Sog^{-1}.
4) Soit M un point du plan tel que f(M) = M_1 et g(M) = M_2.
   a) Montrer que BM_2M_1 est un triangle rectangle isocèle en B de sens direct.
   b) La perpendiculaire en A à la droite (AI) coupe (ΩC) en K. Montrer que f(Ω)=K.
   c) En déduire la nature du triangle BΩK.

<u>Exercice n°6 :</u>

Soit ABCD un rectangle de centre O tel que AB = 2AD et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$, I = A*B , J = C*D et K = D*J. Soit h une similitude directe de centre A qui transforme C en O.

1) Montrer que h est une homothétie.

2) Soit σ la similitude indirecte qui transforme D en B et K en C. Préciser le rapport de σ.
3) On pose g = h o σ ; préciser g(D) et g(K). En déduire que g est une symétrie axiale dont on précisera l'axe . Caractériser alors σ

Exercice n°7 :

ABC est un triangle rectangle et isocèle tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$. On pose D = S_A(C). Soit σ la similitude indirecte qui envoie A en B et B en C.

1) Déterminer le centre Ω de σ et vérifier que Ω =D.
2) Le plan P muni d'un repère orthonormé $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$. Soit f : P$\rightarrow$P ; $M(z)\rightarrow M'(z')$ tel que $z'=-(1+i)\overline{z}+1$
   a) Montrer que f est une similitude indirecte.
   b) Montrer que f = σ .

Exercice n°8 :

Le plan est orienté dans le sens direct.

OAB est un triangle rectangle et isocèle en O et tel que $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit I le milieu de segment [AB]. On désigne par C et D les symétriques respectifs du point I par rapport à O et à B. Soit f la similitude directe qui envoie A sur D et O sur C.

1) Montrer que f a pour rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
2) a) Montrer que O est l'orthocentre du triangle ACD.
   b) Soit J le projeté orthogonal du point O sur (AC).
   c) Déterminer les images des droites (OJ) et (AJ) par f et en déduire que J est le centre de similitude f.
3) Soit g la similitude indirecte de centre I qui envoie A sur D.
   a) Vérifier que g est de rapport 2 et d'axe (IC) , en déduire g(O).
   b) Déterminer les images de C et D par gof^{-1}. En déduire la nature de gof^{-1}.
4) Soit I' = f(I) et J' = g(J).
   a) Déterminer les images des points J et I' par gof^{-1} .
   b) Montrer que les droites (IJ) , (I'J') et (CD) sont contractantes.

Exercice n°9 :

$R\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ un repère orthonormé du plan. Soit f : P$\rightarrow$P , $M(x,y)\mapsto M'(x',y')$ tel que : $\begin{cases} x'=x+y+1 \\ y'=x-y \end{cases}$

1) Montrer que la forme complexe de f est $f: M(z)\rightarrow M'(z')$ tel que $z'=(1+i)\overline{z}+1$.
2) Caractériser f.