Prof :Khammour.Khalil **Année Scolaire :**2013/2014	**Série d'exercices :** **Géométrie dans l'espace**	$4^{ème}$ Math **Tunis ,Tél :27509639**

Exercice n°1 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration pourra consister à fournir un contre-exemple.

1) La droite Δ de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t+2 \\ y = -2t \\ z = 3t-1 \end{cases}$ t ∈IR est parallèle au plan P dont une équation cartésienne est P : x + 2y +z − 3 = 0

2) Les droites Δ et Δ'de représentations paramétriques respectives :

$\begin{cases} x = 2-3t \\ y = 1+t \\ z = -3+2t \end{cases}$ t ∈IR ; $\begin{cases} x = 7+2\alpha \\ y = 2+2\alpha \\ z = -6-\alpha \end{cases}$ α∈IR sont sécantes.

3) On considère les points : A (−1 ; 0 ; 2), B (1 ; 4 ; 0), et C (3 ; −4 ; −2).Le plan (ABC) a pour équation x +z = 1.

4) On considère les points : A (−1 ; 1 ; 3), B (2 ; 1 ; 0), et C (4 ; −1 ; 5). On peut écrire C comme barycentre des points A et B.

5) L'espace est rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$). Soit (*P*) le plan dont une équation est : 2*x* + *y* – 3*z* = 0. Soit A le point de coordonnées (1, 11, 7). Le point H, projeté orthogonal de A sur (*P*), a pour coordonnées (0, 2 1).

Exercice n°2 :

Répondre par vrai ou faux :

1) Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), on donne le point Ω(1 ; -2 ;0) et le plan P d'équation *x* + *y* – 3z + 4 = 0.

a) Une représentation paramétrique de la droite D passant par le point Ω et perpendiculaire au plan P est : $\begin{cases} x = 2+\alpha \\ y = -1+\alpha \\ z = -3-3\alpha \end{cases}$ α∈IR.

b) Les coordonnées du point d'intersection H de la droite D avec le plan P est $\left(\frac{8}{11},\frac{-25}{11},\frac{9}{11}\right)$

c) La distance du point Ω au plan P est égale à :$\frac{9}{\sqrt{11}}$.

d) On considère la sphère de centre Ω et de rayon 3. L'intersection de la sphère S et le plan P est le cercle de centre H et de rayon $r = \frac{3\sqrt{10}}{11}$.

2) On considère les points A(3 ;1 ;3) et B(-6 ;2 ;1).Le plan P admet pour équation :
P : x + 2y + 2z - 5=0.
   a) L'ensemble des points M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\| = 5$ est une sphère.
   b) Les coordonnées du point H ,projeté orthogonal de A sur le plan P est $\left(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
   c) La sphère de centre B et de rayon 1 Coupe le plan P suivant un cercle.

Exercice n°3 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.On considère les points A(2,-1,1) ,B(-1,1,-1) et C(1,2,0).

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
   b) En déduire que A,B et C ne sont pas alignés.
   c) Calculer l'aire du triangle ABC.
2) Soit P le plan d'équation : $2x + 2y - 5z - 4 = 0$. Soit Δ la droite d'équations cartésiennes : $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = z - 1$.
   a) déterminer l'intersection de P et Δ.
   b) Vérifier que la droite (BC) est incluse dans P et que Δ passe par le point A.
3) Soit le point D(-2,3,-1).
   a) Montrer que A,B,C et D ne sont pas coplanaires.
   b) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.
4) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tel que $(\overrightarrow{DM} - \overrightarrow{AM}) \wedge \overrightarrow{BM} = 0$.

Exercice n°4 :

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1.On munit l'espace d'un repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.Soit I=B*F et J tel que $\overrightarrow{EJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$.

1) a) Déterminer les coordonnées des points I et J et du vecteur $\overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AJ}$.
   b) Montrer que l'aire du triangle AIJ est $\frac{\sqrt{14}}{3}$.
2) Montrer que le volume du tétraèdre AIJE est $\frac{1}{9}$ puis déduire la distance du point E au plan AIJ.
3) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (AIJ) est $x + 3y - 2z = 0$ .Calculer la distance de E au plan AIJ.
4) Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 2 = 0$.

a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

b) Montrer que S et (AIJ) sont sécants suivants un cercle que l'on précisera.

5) Déterminer les plans qui sont parallèles au plan (AIJ) et tangents à S et déterminer les coordonnées de leurs points de contact.

Exercice n°5 :

ABCDEFGH est un cube d'arête 1. Soient les points I,J et K tels que I=B*C ; J=A*E ;K=D*C

On munit l'espace d'un repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1) a) Vérifier que I a pour coordonnées $(1, \frac{1}{2}, 0)$ et K a pour coordonnées $(\frac{1}{2}, 1, 0)$.

b) Déterminer les composantes de $\overrightarrow{GI} \wedge \overrightarrow{GK}$.

c) Calculer alors le volume V de tétraèdre JGKI.

2) a) Montrer que le plan (GIK) a pour équation $2x + 2y - z - 3 = 0$.

b) Montrer que (CJ): $\begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = 1 - 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$ $\alpha \in$IR.

3) La droite (CJ) coupe le plan (GIK) en H'.

a) Vérifier que la droite (CJ) est perpendiculaire au plan (GIK).

b) Déterminer les 2 points de (CJ) dont la distance au plan (GIK) est égale à 1.

Exercice n°6 :

On désigne par *A*, *B*, *C*, *F* les points de coordonnées respectives A(4, 1, 5), B(−3, 2, 0), C(1, 3, 6),D (−7, 0, 4).

1) a) Démontrer que les points *A*, *B*, *C* définissent un plan *P* et que ce plan a pour équation cartésienne $x + 2y - z - 1 = 0$.

b) Déterminer la distance *d* du point *F* au plan P.

2) On appelle Δ la droite qui passe par le point *F* et qui est perpendiculaire au plan *P*.

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

b) Déterminer les coordonnées du point *H*, projeté orthogonal du point *F* sur le plan *P*.

3) Soit *S* la sphère de centre *F* et de rayon 6.

a) Justifier que le point *B* appartient à la sphère *S*.

b) Préciser le centre et déterminer le rayon du cercle *C*, intersection de la sphère *S* et du plan *P*.

Exercice n°7 :

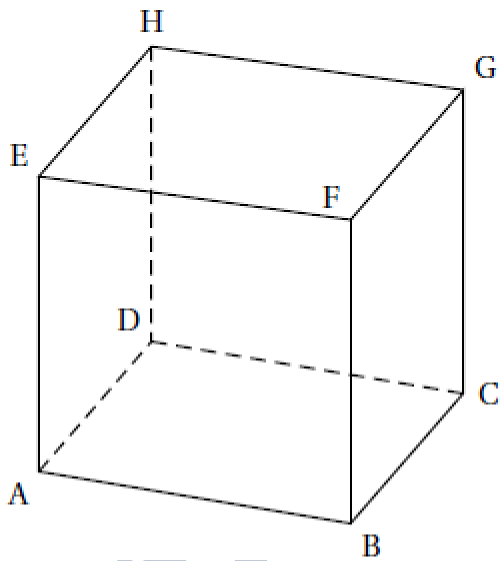
ABCDEFGH est un cube d'arête 1. On munit l'espace d'un repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1) Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCE).
2) Déterminer une équation du plan (BCE).
3) On note (Δ) la droite perpendiculaire en E au plan (BCE). Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ).
4) Démontrer que la droite (Δ) est sécante au plan (ABC) en un point Ω, symétrique de B par rapport à A.
5) a) Démontrer que le point D est le barycentre des points Ω, B et C affectés des coefficients respectifs 1, -1 et 2.

   b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 2\sqrt{2}$.

   c) Démontrer que les points B, E et G appartiennent à l'ensemble (S).

   d) Démontrer que l'intersection du plan (BCE) et de l'ensemble (S) est un cercle dont on précisera le rayon.



Exercice n°8 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.On considère la droite Δ passant par le point A(-3,-1,-3) et de vecteur directeur $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ et la droite D passant par le point B(3,2,3) et de vecteur directeur $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

1) a) Calculer $\vec{u}.\vec{v}$ et dét$(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB})$.

   b)Justifier que les droites Δ et D sont orthogonales et non coplanaires.

c) Déterminer une équation cartésienne du plan contenant Δ et parallèle à D.

2) Soit S la sphère de centre C(-1,0,-1) et de rayon 6 et P le plan d'équation :

$2x + y + 2z + 13 = 0$

a) Montrer que S et P se coupent suivant un cercle de centre A. Déterminer le rayon de cercle.

b) Montrer que la droite D est tangente à la sphère S au point B.

3) a) Calculer AB. En déduire que le point C appartient au segment [AB].

b) Déterminer alors une droite perpendiculaire aux droites D et Δ.

Exercice n°9 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.On considère les points A(6,0,0) ; B(0 ,6 ,0) , ; C(0,0,6) et D(-2,-2,-2).

1) a) Vérifier que les points A,B et C déterminent un plan P d'équation x + y + z – 6=0.

b) Vérifier que la droite (OD) est perpendiculaire au plan P.

c) Donner un système d'équation paramétrique de la droite (OD).

d) Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan P. Vérifier que H a pour coordonnées (2,2,2) et qu'il est équidistant de A ,B et C.

e) En déduire que (OD) est l'axe du cercle circonscrit au triangle ABC.

2) Soit Q le plan médiateur du segment [CD].

a) Montrer qu'une équation cartésienne de Q est x + y +4z - 6 =0.

b) Montrer que (OD) coupe Q en un point Ω dont on déterminera les coordonnées.

3) Soit S la sphère de centre Ω et de rayon $3\sqrt{3}$.

a) Ecrire une équation cartésienne de S.

b) Vérifier que S passe par A,B,C et D.

c) Quelle est alors l'intersection de S et P ?

Exercice n°10 :

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit S=$\{M(x, y, z) \in \xi \,;\, x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z + 5 = 0\}$.

1) Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre I et le rayon R.

2) Soit P le plan d'équation :x-2y+2z+2=0.

a) Montrer que l'intersection entre S et P est un cercle (C).

b) Déterminer les coordonnées deu centre A et le rayon r du cercle (C).

3) Soit M(a,b,-1) un point de la sphère S où a et b sont deux réels et Q le plan d'équation :

(a -1)x + (b+2)y + z – a + 2b=0

a) Montrer que M appartient au plan Q.

b) Montrer que S et Q sont tangents en M.

Exercice n°11 :

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.On considère A(1,1,2) ,B(1,3,0) et C(2,1,1) .

1) a) Montrer que ABC est rectangle en C.
   b) Donner une équation cartésienne du plan (ABC)=P.
2) Soit S : $x^2+y^2+z^2-4x-6y-4z+12=0$ et $P_m: x+my+z-4=0$ (m ∈IR).
   a) Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre I et le rayon R.
   b) Discuter suivant les valeurs de m la nature de $S \cap P_m$.
3) On pose m=1.
   a) Montrer que $S \cap P_1$ est un cercle $\mathcal{C}$ don on précisera le centre H et le rayon r.
   b) Montrer que $\mathcal{C}$ est un cercle de diamètre [AB].
   c) Ecrire une équation cartésienne du plan Q strictement parallèle à P_1 et coupant S suivant un cercle de rayon $\sqrt{2}$.
4) Soit S' la sphère de centre J(1,2,1) et de rayon $2\sqrt{5}$.Déterminer les homothéties qui transforment S en S'.

Exercice n°12 :

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.On donne les points A(2,-1,-4) ; B(0,1,-2) et le plan $P_m: x+(1-2m)y-mz-1=0$ (m ∈IR) où m est un paramètre réel .

1) a) Vérifier que pour tout réel m B∈ P_m.
   b) Déterminer m pour que (AB) soit perpendiculaire à P_m .
   c) Calculer $d_m = d(A,P_m)$ en fonction de m,en déduire la valeur de m pour laquelle (AB)⊂ P_m.
   d) Soit H_m le projeté orthogonal de A sur P_m.Déterminer m pour que AH_mB soit rectangle et isocèle.
2) Soit $t \in]-\infty,1[$ et $S_t = \{M \in E \text{ tel que } \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \ln(1-t)\}$
   a) Ecrire une équation de S_t.
   b) Déterminer suivant t , la nature de S_t.
3) Soit h l'homothétie de centre B et de rapport (-2).
   a) Déterminer l'expression analytique de h.
   b) Déterminer h(P_m).

Exercice n°13 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.Soit A(6,0,0) , B(0,-6,0) et C(0,0,3) et soit S la sphère d'équation : $x^2+y^2+z^2-x+y-2z-12=0$.

1) a) Déterminer une équation du plan P passant par A,B et C.
   b) Déterminer le centre I de S et calculer son rayon.
   c) Montrer que S et P sont sécants suivant un cercle dont on déterminera le centre H et le rayon .
2) a) Vérifier que le point K(-1,1,-2) est un point de S.
   b) Déterminer une équation du plan Q tangent à S en K.

c) Vérifier que P et Q sont parallèles.

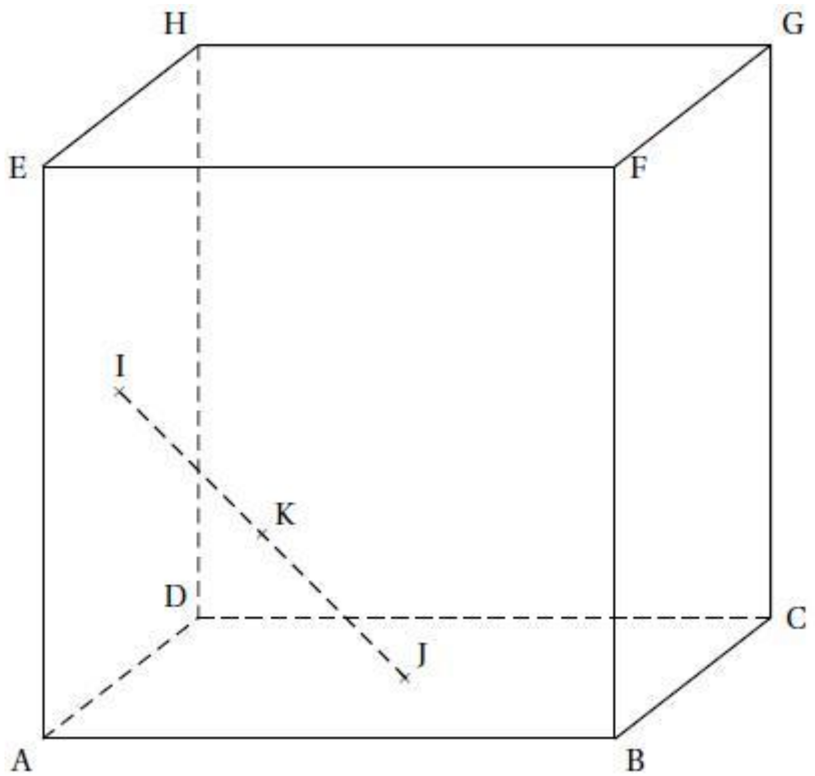
3) Soit h une homothétie de centre I qui transforme P en Q.

a) Montrer que h à pour rapport -3.

b) Déterminer une équation de la sphère S’ image de S par h.

Exercice n°14 :

On considère un cube ABCDEFGH d’arête de longueur 1.



On note I le centre de la face ADHE, J celui de la face ABCD et K le milieu du segment [IJ]. L’espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$

1) Déterminer les coordonnées des points l, J et K dans ce repère.
2) Démontrer que les points A, K et G ne sont pas alignés.
3) a) Démontrer que le plan médiateur du segment [IJ] est le plan (AKG).
   b) Déterminer une équation cartésienne du plan (AKG).
   c) Vérifier que le point D appartient au plan (AKG).
4) Dans cette question, on veut exprimer K comme barycentre des points A, D et G.

Soit L le centre du carré DCGH.

a) Démontrer que le point K est le milieu du segment [AL].

b) Démontrer que K est le barycentre des points A. D et G affectés de coefficients que l’on précisera.

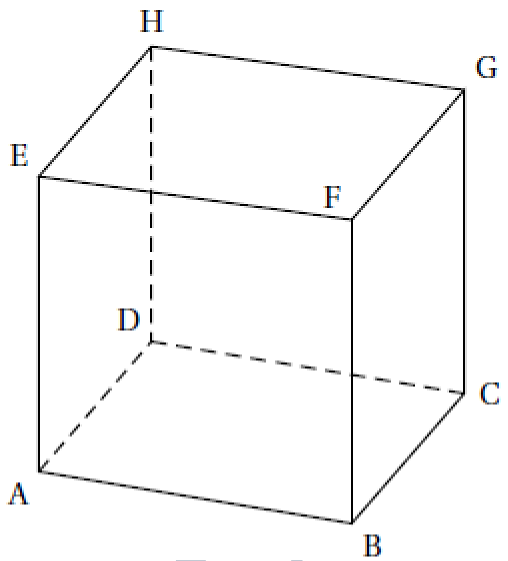
Exercice n°15 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives : A(1 ; -2 ; 4) ; B(−2 ; -6 ; 5) et C(−4 ; 0 ; -3).

1) a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b) Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ (1 ; -1 ; -1) est un vecteur normal au plan (ABC).
   c) Déterminer une équation du plan (ABC).
2) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par le point O et orthogonale au plan (ABC).
   b) Déterminer les coordonnées du point O' projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).
3) On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC). Soit *t* le réel tel que $\overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC}$.
   a) Démontrer que $t = \frac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}}{|BO|^2}$
   b) En déduire le réel *t* et les coordonnées du point H.

Exercices n°16 :

ABCDEFGH est un cube d'arête 1. On munit l'espace d'un repère orthonormé direct $(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.



On note K le barycentre des points pondérés (D, 1) et (F, 2).

Partie A

1) Montrer que le point K a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$
2) Montrer que les droites (EK) et (DF) sont orthogonales.
3) Calculer la distance EK.

Partie B

Soit M un point du segment [HG].
On note *m* = HM (*m* est donc un réel appartenant à [0,1]).

1) Montrer que, pour tout réel m appartenant à l'intervalle [0,1], le volume du tétraèdre EMFD, en unités de volume, est égal à $\frac{1}{6}$.

2) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (MFD) est $(-1+m)x + y - mz = 0$.

3) On note m d la distance du point E au plan (MFD).

a) Montrer que, pour tout réel m appartenant à l'intervalle [0,1],$d_m = \frac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}$

b) Déterminer la position de M sur le segment [HG] pour laquelle la distance d_m est maximale.

c) En déduire que lorsque la distance m d est maximale, le point K est le projeté orthogonal de E sur le plan (MFD).

<u>Exercice n°17 :</u>

On se propose dans cet exercice, d'étudier des propriétés d'un solide de l'espace.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points A(3 ; 4 ; 0) ; B(0 ; 5 ; 0) et C(0 ; 0 ; 5). On note I le milieu du segment [AB].

1) Faire une figure où l'on placera les points A, B,C, I dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

2) Démontrer que les triangles OAC et OBC sont rectangles et isocèles.

Quelle est la nature du triangle ABC?

3) Soit H le point de coordonnées $\left(\frac{15}{19},\frac{45}{19},\frac{45}{19}\right)$

a) Démontrer que les points H, C, I sont alignés.

b) Démontrer que H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

c) En déduire une équation cartésienne du plan ABC.

4) Calculs d'aire et de volume.

a) Calculer l'aire du triangle OAB. En déduire le volume du tétraèdre OABC.

b) Déterminer la distance du point O au plan (ABC).

c) Calculer l'aire du triangle ABC.