Exercice n°1 :

Déterminer une primitive F de f sur I :

1) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{-4x+5}}$; f continue sur $]\frac{5}{4},+\infty[$ alors f admet une primitive F sur $]\frac{5}{4},+\infty[$

$f(x)=\frac{-1}{4}\times\frac{-4}{\sqrt{-4x+5}}\Leftrightarrow f(x)=\frac{-1}{4}\times\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\Leftrightarrow F(x)=\frac{-1}{4}\times 2\sqrt{u(x)}=\frac{-1}{2}\sqrt{-4x+5}$

2) $f(x)=\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ f continue sur $\mathbb{R}^*$alors f admet une primitive F sur $\mathbb{R}^*$; $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\times\cos\sqrt{x}$

$f(x)=\frac{2}{2\sqrt{x}}\times\cos\sqrt{x}\Leftrightarrow f(x)=u'(x)\times v'\big(u(x)\big)\Leftrightarrow F(x)=vou(x)=2\sin(\sqrt{x})$

3) $f(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{-x^2+x+1}}$ f continue sur $]\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2}[$alors f admet une primitive F sur $]\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2}[$

$f(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{-x^2+x+1}}\Leftrightarrow f(x)=\frac{-(-2x+1)}{\sqrt{-x^2+x+1}}\Leftrightarrow f(x)=-\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\Leftrightarrow F(x)=-2\sqrt{u(x)}=-2\sqrt{-x^2+x+1}$

4) $f(x)=\frac{1}{\cos^4(x)}=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^4(x)}=\frac{\cos^2(x)}{\cos^4(x)}+\frac{\sin^2(x)}{\cos^4(x)}=\frac{1}{\cos^2(x)}+\frac{1}{\cos^2(x)}\times\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$

$=\big(tg(x)\big)'+\big(tg(x)\big)'\times tg^2(x)=\big(tg(x)\big)'+\frac{1}{3}\times 3\big(tg(x)\big)'\times tg^2(x)=\big(tg(x)\big)'+\frac{1}{3}\big(tg^3(x)\big)'$

$\Leftrightarrow F(x)=tg(x)+\frac{1}{3}tg^3(x)$

5) $f(x)=\frac{3x^2}{(1+x^3)^4}$ f continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$alors f admet une primitive F sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$f(x)=\frac{3x^2}{(1+x^3)^4}=\frac{3x^2\times(1+x^3)^2}{(1+x^3)^4\times(1+x^3)^2}=-\frac{1}{3}\times\frac{-9x^2\times(1+x^3)^2}{(1+x^3)^4\times(1+x^3)^2}=-\frac{1}{3}\times\frac{-[\big((1+x^3)^3\big]'}{(1+x^3)^6}\Leftrightarrow F(x)=-\frac{1}{3}\times\frac{1}{(1+x^3)^3}$

6) $f(x)=\frac{\sin(x)}{(2+\cos(x))^2}=\frac{-(-\sin(x))}{(2+\cos(x))^2}=\frac{-(2+\cos(x))'}{(2+\cos(x))^2}\Leftrightarrow F(x)=\frac{1}{2+\cos(x)}$

7) $f(x)=(x+2)\big(\sqrt{x-1}\big)$ f continue sur $[1,+\infty[$ alors f admet une primitive F sur $[1,+\infty[$

$f(x)=(x+2)\big(\sqrt{x-1}\big)=(x-1+3)\big(\sqrt{x-1}\big)=\big(\sqrt{x-1}\big)^3+3\big(\sqrt{x-1}\big)$

$=2\times\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\big(\sqrt{x-1}\big)^4+3\big(\sqrt{x-1}\big)^2\times\frac{2}{2\sqrt{x-1}}\Leftrightarrow F(x)=2\frac{\big(\sqrt{x-1}\big)^5}{5}+6\frac{\big(\sqrt{x-1}\big)^3}{3}$

($f(x)=u'.u^n\Leftrightarrow F(x)=\frac{u^{n+1}}{n+1}$)

8) $f(x)=(x+1)\sqrt{x}$ f continue sur $\mathbb{R}^*$alors f admet une primitive F sur $\mathbb{R}^*$

$f(x)=(x+1)\sqrt{x}=x\sqrt{x}+\sqrt{x}=2\frac{1}{2\sqrt{x}}\big(\sqrt{x}\big)^4+\sqrt{x}\Leftrightarrow F(x)=2\frac{(\sqrt{x})^5}{5}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}$

10) $f(x)=x(1+x^2)^{2014}\Leftrightarrow F(x)=\frac{1}{2\times2015}\times(1+x^2)^{2015}$

12) $f(x)=x^2\sin(1+x^3)=-\frac{1}{3}\times(-3)x^2\sin(1+x^3)\Leftrightarrow F(x)=-\frac{1}{3}\cos(1+x^3)$

13) $f(x)=\frac{3x+1}{\sqrt{x^2+\frac{2}{3}x+10}}=\frac{\frac{3}{2}\times(2x+\frac{2}{3})}{\sqrt{x^2+\frac{2}{3}x+10}}=2\times\frac{\frac{3}{2}\times(2x+\frac{2}{3})}{2\times\sqrt{x^2+\frac{2}{3}x+10}}\Leftrightarrow F(x)=3\times\sqrt{x^2+\frac{2}{3}x+10}$

Exercice n°2 :

On pose $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.Soit G la primitive de φ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0

1) Montrer que G est impaire.$\left(-\mathrm{G}(-\mathrm{x})\right)' = \mathrm{G}'(-\mathrm{x}) = \varphi(-x) = \varphi(x)$ donc $-G(-x)$ est une primitive de φ et comme $-\mathrm{G}(-\mathrm{x})$ s'annule en 0 donc $-\mathrm{G}(-\mathrm{x}) = \mathrm{G}(\mathrm{x})$ d'où $\mathrm{G}(-\mathrm{x}) = -\mathrm{G}(\mathrm{x})$ et par suite G est impaire .

2) a) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\psi(x) = G(x) + G(\frac{1}{x})$. ψ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$\psi'(x) = G'(x) + \left(\frac{-1}{x^2}\right) G'\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi(x) - \left(\frac{1}{x^2}\right) \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{x^2}{1+x^2} = 0$ donc ψ est constante sur $\mathbb{R}^*$

On a ψ est constante sur $\mathbb{R}^*$: $\psi(x) = c = G(1) + G(1) = 2G(1)$ donc $\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = 2G(1)$

b) $U(t) = G(\operatorname{tg} t)$ $\quad t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ $\quad U'(t) = \left(1 + tg^2(t)\right)G'\left(tg(t)\right) = 1$

3) Déterminer $G(1) = G\left(tg\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$ et $\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = 2G(1) = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x\to+\infty} G(x) = \frac{\pi}{2}$ D'abord $\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = \lim_{x\to+\infty} G(x) + \lim_{x\to+\infty} G\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x\to+\infty} G\left(\frac{1}{x}\right) = G(0) = 0$

4) $G'(x) = \varphi(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ G est impair donc on peut l'étudier sur $[0, +\infty[$ et le point O(0,0) est un point de symétrie

x	0 $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
G(x)	0 $\nearrow$ $\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x\to+\infty} G(x) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \Delta: \mathrm{y} = \frac{\pi}{2}$ est une asymptote horizontale à $\mathrm{C_G}$.(respectivement $\Delta': \mathrm{y} = -\frac{\pi}{2}$)