Lycée Secondaire El Ksour	Série De Révision SUITE & GEO ESPACE	Prof Bouzouraa Chaouki
Année Scolaire 2014-2015	MATHÉMATIQUES	Bac

Exercice 1

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$. On pose $v_n = u_n - 3$.

1) a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

Exercice 2

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 2}$.

1) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près des quatre premiers termes de la suite (u_n)

2) Montrer par récurrence que pour tout entier n, si $0 < u_n < 2$

3) Résoudre l'inéquation $-x^2 + x + 2 \geq 0$

4) Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n. Déduire de ce qui précède que $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout entier n. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

5) Montrer que pour tout n, $|u_{n+1} - 2| < \frac{1}{2}|u_n - 2|$.

6) En déduire que pour tout n, $|u_n - 2| < \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$.

7) Que peut-on en conclure sur la convergence de la suite (u_n) ?

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right)$

1) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Pour quelle valeur de u_0 la suite est-elle stationnaire ?

2) On pose $u_0 = 1$.

a) Démontrer les relations suivantes : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{1}{2u_n}\left(u_n - \sqrt{3}\right)^2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + \sqrt{3} = \frac{1}{2u_n}\left(u_n + \sqrt{3}\right)^2$

b) Démontrer que $(u_n)_n$ est une suite strictement décroissante pour $n \geq 1$

c) En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

3) On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$

a) Calculer v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire l'expression de v_{n+1} en fonction de v_1 et de n.

b) Calculer la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et retrouver la limite de $(u_n)_n$

Exercice 4

Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$

1) a) Montrer que (u_n) est majorée par 4.

b) Montrer que (u_n) est strictement croissante

c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

2) a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$

b) Retrouver le résultat du 1.c)

c) Etudier la convergence de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = n^2(4 - u_n)$

Exercice 5

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

1. a. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

Étudier le sens de variation de f, et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. (On prendra comme unité 2 cm).

b. Utiliser le graphique précédent pour construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 de l'axe $\left(O\,;\vec{\imath}\right)$ d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

b. Montrer que pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$, $f(x) \leqslant x$.

c. En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

d. Prouver qu'elle converge.

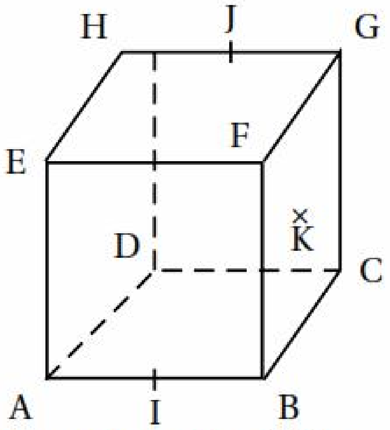
3. Soit ℓ la limite de la suite (u_n). Montrer que ℓ est solution de l'équation

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

En déduire sa valeur.

Exercice 6

Dans un cube ABCDEFGH, on désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [GH]. K désigne le centre de la face BCGF. Les calculs seront effectués dans le repère orthonormal $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.



1. a. Démontrer que le quadrilatère DIFJ est un parallélogramme.
Établir que DIFJ est en fait un losange et montrer que l'aire de ce losange est égale à $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

b. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (DIJ).

En déduire une équation cartésienne de ce plan.

c. Déterminer la distance du point E au plan (DIJ), puis calculer le volume de la pyramide EDIFJ. On rappelle que le volume V d'une pyramide de hauteur h et de base correspondante $\mathscr{B}$ est donné par la formule suivante $V = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$.

2. Soit (Δ) la droite passant par E et orthogonale au plan (DIJ)

a. Donner une représentation paramétrique de (Δ) et prouver que K est un point de (Δ).

b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection L de (Δ) et du plan (DIJ).

c. Vérifier que L est le centre de gravité du triangle BEG.

3. Soit (S) l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - z + \dfrac{4}{3} = 0$.

a. Vérifier que (S) est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

b. Montrer que L est un point de (S), Quelle propriété géométrique relative à (S) et au plan (DIJ) peut-un déduire de ce dernier résultat ?

Exercice 7

Partie A :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x+1).$$

Sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère orthogonal $\left(O,\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ est donnée en annexe.

1. a. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\ +\infty[$.

b. L'axe des abscisses est-il tangent À la courbe $(\mathscr{C})$ au point O ?

2. On pose $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

a. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \neq -1$,

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}.$$

b. Calculer I.

3. À l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2, calculer, en unités d'aires, l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0,25$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0\,;\,1]$. On note α cette solution. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B :

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
La suite (u_n) converge-t-elle ?

2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\ln 2}{n+1}$.
En déduire la limite de la suite (u_n).

Courbe $(\mathscr{C})$