Exercice N°1

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On considère l'équation (E) : $7x-6y=1$ où x et y sont des entiers naturels.

1. Donner une solution particulière de l'équation (E).
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples $(n,\ m)$ d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation

$$7^n-3\times 2^m=1 \text{ (F).}$$

1. On suppose $m\le 4$. Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.
2. On suppose maintenant que $m\ge 5$.

a. Montrer que si le couple $(n,\ m)$ vérifie la relation (F) alors $7^n\equiv 1(\text{ modulo } 32)$.

b. En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple $(n,\ m)$ vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.

c. En déduire que si le couple $(n,\ m)$ vérifie la relation (F) alors $7^n\equiv 1(\text{ modulo } 5)$.

d. Pour $m\ge 5$, existe-t-il des couples $(n,\ m)$ d'entiers naturels vérifiant la relation (F) ؟

3. Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).

Exercice N°2

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

Soit n un entier naturel non nul.

1. On considère l'équation notée (E) : $3x + 7y = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs tels que $3u + 7v = 1$.
En déduire une solution particulière $(x_0\ ;\ y_0)$ de l'équation (E).

b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ solutions de (E).

2. On considère l'équation notée (G) $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Montrer que $100 \equiv 2$ (modulo 7). Démontrer que si $(x\ ;\ y)$ est solution de (G) alors $3x^2 \equiv 2^n$ (modulo 7).

b. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7							

c. Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7. En déduire que l'équation (G) n'admet pas de solution.

Exercice N°3

1. On se propose, dans cette question, de déterminer tous les entiers relatifs N tels que $\begin{cases} N\equiv 5[13] \\ N\equiv 1[17] \end{cases}$.

a. Vérifier que 239 est solution de ce système.

b. Soit N un entier relatif solution de ce système. Démontrer que N peut s'écrire sous la forme $N=1+17x=5+13y$ où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant la relation $17x - 13y = 4$.

c. Résoudre l'équation $17x - 13y = 4$ où x et y sont des entiers relatifs.

d. En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que $N = 18 + 221k$.

e. Démontrer l'équivalence entre $N\equiv 18[221]$ et $\begin{cases} N\equiv 5[13] \\ N\equiv 1[17] \end{cases}$.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche,même incomplète, ou d'initiative,même infruxtueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

a. Existe-t-il un entier naturel k tel que $10^k\equiv 1[17]$ ؟

b. Existe-t-il un entier naturel l tel que $10^l\equiv 18[221]$ ؟

Exercice N°4

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009, c'est-à-dire tel que $n^3 \equiv 2009[10000]$.

Partie A

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2009^2 par 16.

2. En déduire que $2009^{8001} \equiv 2009[16]$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2009^2 - 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$.

1. a. Démontrer que u_0 est divisible par 5.

b. Démontrer, en utilisant la formule du binome de Newton, que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n\left(u_n^4 + 5\left(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1\right)\right)$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 5^{n+1}.

2. a. Vérifier que $u_3 = 2009^{250} - 1$ puis en déduire que $2009^{250} \equiv 1[625]$.

b. Démontrer alors que $2009^{8001} \equiv 2009[625]$.

Partie C

1. En utilisant le théorème de Gauss et les résultats établis dans les questions précédentes, montrer que $2009^{8001} - 2009$ est divisible par 10 000.

2. Conclure, c'est-à-dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009.

Exercice N°5

1. a. Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 ؟ Justifier.

b. Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 ؟ Justifier.

c. En déduire que $6^{40} \equiv 1[11]$ et que $6^{40} \equiv 1[5]$.

d. Démontrer que $6^{40} - 1$ est divisible par 55.

2. Dans cette question x et y désignent des entiers relatifs.

a. Montrer que l'équation (E) $65x - 40y = 1$ n'a pas de solution.

b. Montrer que l'équation (E') $17x - 40y = 1$ admet aumoins une solution.

c. Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E').

d. Résoudre l'équation (E').

En déduire qu'il existe un unique naturel x_0 inférieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1[40]$.

3. Pour tout entier naturel a, démontrer que si $a^{17} \equiv b[55]$ et si $a^{40} \equiv 1[55]$, alors $b^{33} \equiv a[55]$.

Exercice N°6

1. a. Pour $1 \leq n \leq 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.

b. Démontrer que, pour tout n, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7. En déduire que 3^{n+6} et 3^n ont même reste dans la division par 7.

c. A l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7.

d. De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque ؟

e. En déduire que, pour tout entier naturel n, 3^n est premier avec 7.

2. Soit $u_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} 3^i$, n entier supérieur ou égal à 2.

a. Montrer que $u_n = \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)$.

b. Déterminer les valeurs de n telles que u_n soit divisible par 7.

c. Déterminer tous les diviseurs de u_6.