Résumé : *Suites réelles*
Niveau : *Bac sciences expérimentales*
Réalisé par : *Prof. Benjeddou Saber*
Email : saberbjd2003@yahoo.fr

Théorème :

Soit (u_n) une suite réelle et l finie ou infini.
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, si et seulement si, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l$.

Théorème :

Toute suite convergente est bornée.

Opérations sur les limites :

Limite d'une somme :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Limite d'un produit :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n)$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Limite d'un quotient :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$l' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	0^+	0^-	0^+	0^-
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Théorème :

Soit q un réel.

- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leq -1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ n'existe pas.

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et (u_n) une suite d'éléments de I.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ (fini ou infini) et si $\lim\limits_{x\to l} f(x) = L$ (fini ou infini), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = L$.

Théorème :

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) des suites ; l et l' des réels.

- Si $u_n \leq v_n$, $n \geq n_0$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$, alors $l \leq l'$.
- Si $v_n \leq u_n \leq w_n$, $n \geq n_0$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.
- Si $|u_n| \leq v_n$, $n \geq n_0$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si $u_n \geq v_n$, $n \geq n_0$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $u_n \leq v_n$, $n \geq n_0$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Théorème :

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite.

- Si la suite (u_n) est croissante et majorée, alors elle converge vers un réels l et pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq l$.
- Si la suite (u_n) est croissante et non majorée, alors elle tend vers $+\infty$.
- Si la suite (u_n) est décroissante et minorée, alors elle converge vers un réels l et pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq l$.
- Si la suite (u_n) est décroissante et non minorée, alors elle tend vers $-\infty$.

Théorème :

Soit (u_n) une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \geq 0$ où f est une fonction.

Si la suite (u_n) est convergente vers un réel l et si la fonction f est continue en l alors $f(l) = l$.

Définition : *"Suites adjacentes"*

Deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes lorsqu'elles vérifient les conditions suivantes :

- ❖ Pour tout $n \geq 0$: $u_n \leq v_n$.
- ❖ La suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante.
- ❖ La suite $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

Théorème :

Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.