LYCEE SAID BOU BAKKER MOKNINE PROF: HANNACHI SALAH « $4^{\text{éme}}$ Sciences informatiques »	2016/2017 **SERIE D'EXERCICES N°1** *Les suites réelles*

EXERCICE N 1 :

On considère la suite (u_n) définie sur IN^* par : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4} \end{cases}$

1) Montrer que $1 < u_n \leq 2$ pour tout $n \in IN^*$

2) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis calculer sa limite ℓ.

3) Soit $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$ pour tout $n \in IN^*$ et on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n à l'aide de n. Puis retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

c) Montrer que $S_n = \frac{1}{4}[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n]$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

EXERCICE N 2 :

On considère la suite définie sur IN par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{3u_n+5}$.

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n > 0$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante, en déduire qu'elle est convergente.

c) Déterminer alors sa limite.

2) On définit, pour tout entier naturel n, la suite $v_n = \dfrac{5}{u_n}$.

a) Prouver que la suite (v_n) est arithmétique.

b) Exprimer (v_n) en fonction de n, puis (u_n) en fonction de n .

3) Retrouver la limite de la suite (u_n).

EXERCICE N 3 : (QCM)

Cocher l'unique réponse exacte :

1) Soit la suite (u_n) définie sur IN^*par : $u_n = \frac{(-1)^n.\ sin(n)}{n}$ alors :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$ **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ n'existe pas

2) Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $u_n = \dfrac{\sqrt{1+\left(\frac{3}{7}\right)^n}-1}{\left(\frac{3}{7}\right)^n}$ alors :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$ **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

EXERCICE N 4 :

On considère la suite (u_n) définie sur IN par : $u_n = \frac{n!}{3^n}$

1) Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{4}{3}$ pour tout entier naturel $n \geq 3$

2) En déduire que pour tout entier naturel ≥ 3 , on a : $u_n \geq (\frac{4}{3})^{n-3} u_3$.

(Utiliser le principe de récurrence)

3) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

EXERCICE N 5 :

Soit la suite (u_n) définie sur IN^* par : $u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

1) Montrer que suite (u_n) est croissante

2) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ on a : $u_n \geq \frac{n}{\sqrt{n}}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

EXERCICE N 6 :

On considère la suite réelle (u_n) définie sur IN par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n{}^2}$

1) a) Montrer que pour tout n∈IN on a : $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$

b) Etudier la monotonie de (u_n). En déduire qu'elle converge puis donner sa limite L.

2) a) Montrer que pour tout n∈IN on a : $0 < 1 - u_{n+1} \leq \frac{2}{5}(1 - u_n)$

b) A l'aide de raisonnement par récurrence, déduire que pour tout n∈IN,

on a : $0 < 1 - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$:

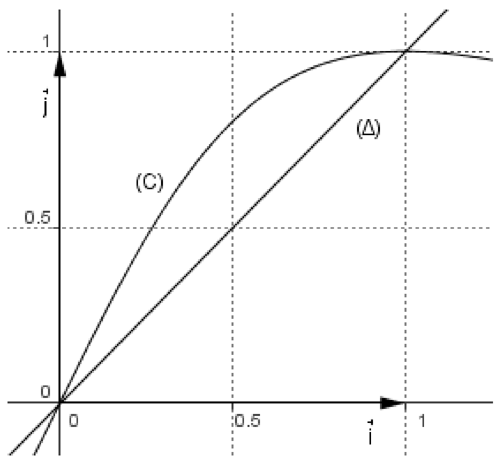
c) Retrouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

EXERCICE N 7 :

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

Dans le graphique ci-contre on a tracé une partie de la courbe (C) de f et la droit Δ : y=x. Soit la suite réelle (u_n) définie sur IN par :

$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$



1) Indiquer sur l'axe des abscisses $(O,\vec{i}\,)$ les quatre premiers termes de la suite (u_n) sans les calculer. Que peut-on conjecturer à propos de la monotonie de la suite (u_n) et de sa convergence.

2) a) Dresser le tableau de variation de la fonction f

b) En déduire que : $0 < u_n < 1$ pour tout n ∈IN.

3) a) Etudier le signe de f(x)−x suivant les valeurs de x dans [0,1].

b) En déduire que la suite (u_n) est croissante

4) Montrer alors que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite