

**Exercice 1 :**

Soit  $g$  la fonction définie par  $g(x) = 2x^3 + x - 1$

- 1) Dresser le tableau de variation de  $g$ . Déterminer  $g(\mathbb{R})$
- 2) Montrer que  $g$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$
- 3) Dédire que l'équation  $g(x) = 0$  admet dans  $\mathbb{R}$  une unique solution  $\alpha$  et que  $\alpha \in ]0,5; 0,6[$

**Exercice 2 :**

Soit  $f$  la fonction sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

- 1) Etudier les variations de  $f$
- 2) a) Ecrire une équation cartésienne de la tangente  $T$  à la courbe de  $f$  au point d'abscisse 0  
b) Etudier la position de  $C_f$  et  $T$ .
- 3) Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[0,1]$ 
  - a) Montrer que  $g$  est une bijection de  $[0,1]$  sur lui-même.
  - b) Expliciter  $g^{-1}$ .
  - c) Calculer pour tout  $x \in [0,1]$ ,  $(g^{-1})'(x)$ .

**Exercice 3 :**

Soit la fonction  $g$  définie par  $g(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

- 1) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ .  
b) Dresser le tableau de variation de  $g$ .  
c) En déduire que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  ;
- 2) Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ 
  - a) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  ;  $f'(x) = g(x)$
  - b) Etudier les variations de  $f$ .
- 3) Montrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.
- 4) Déterminer le domaine de continuité et de dérivabilité de la fonction réciproque  $f^{-1}$  de  $f$  ainsi que son sens de variation.
- 5) a) Calculer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$   
b) Calculer  $f^{-1}(2)$  puis calculer  $(f^{-1})'(2)$  de deux manières différentes puis en déduire la construction de la tangente à  $C_{f^{-1}}$  au point  $A(2, f^{-1}(2))$ .

**Exercice 4**

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$  pour tout  $x$  de  $[-1,1]$ .

- 1) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $[-1,1]$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.
- 2) Soit  $g$  la fonction définie sur  $[-1,1]$  par  $g(x) = f(x) - x$ 
  - a) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in ]-1,1[$ .
  - b) Vérifier que  $\alpha \in ]\frac{2}{3}, 1[$ .
- c) En déduire que la droite  $\Delta : y = x$  coupe la courbe  $C$  de  $f$  en un point unique.
- 3) On pose  $f^{-1}$  la réciproque de  $f$ . Tracer la courbe  $C'$  de  $f^{-1}$  dans un même repère orthonormé.
- 4)  $f^{-1}$  est-elle dérivable en 2 ? en  $\frac{2}{3}$  ?
- 5) Calculer  $f^{-1}(\frac{-1}{2})$ ;  $f(0)$  et  $f(\frac{1}{2})$  en déduire les nombres dérivés de  $f^{-1}$  en  $\frac{5}{3}$  ; en 1 et en  $\frac{5}{7}$