Exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.

On placera sur une même figure, qui sera complétée au fur et à mesure, les points introduits dans le texte *(unité graphique : 2 cm)*

1. a. Résoudre l'équation : $(E):\ z^2-2\sqrt{3}\cdot z+4=0$

   b. On considère les nombres complexes :
   $z_1=\sqrt{3}+i\quad;\quad z_2=\sqrt{3}-i$
   Et on désigne par M et N les points d'affixes respectives z_1 et z_2. Déterminer le module et l'argument de z_1 et z_2 ; placer M et N sur la figure.

   c. Déterminer les affixes des points Q et P images respectives de M et N par la translation de vecteur $\vec{w}=-2\cdot\vec{u}$. Placer P et Q sur la figure. Montrer que $MNPQ$ est un carré.

2. Soit R le symétrique de P par rapport à O, E l'image de P par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, S l'image de E par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}$.
   Placer ces points sur la figure.
   Calculer les affixes de R et de S. Montrer que S appartient au segment $[MN]$.

3. On pose $a=2-\sqrt{3}$:

   a. Montrer que : $1+a^2=4a\quad;\quad 1-a^2=2a\sqrt{3}$

   b. Exprimer les affixes Z de $\overrightarrow{PR}$ et Z' de $\overrightarrow{PS}$ en fonction de a.

   c. Montrer que : $|Z|=|Z'|\quad;\quad \dfrac{Z}{Z'}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

   d. Déduire des questions précédentes la nature du triangle PRS

Exercice 2

Le plan (P) est muni du repère orthonormal direct $(O\,;I\,;J)$ *(unité graphique : 2 cm)*. A tout point M du plan (P) est associé le nombre complexe z, affixe du point M.

1. a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes :

$$z_1 = -1 \quad ; \quad z_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad z_3 = -1 - i\sqrt{3}.$$

   b. Déterminer le module et un argument de chacun des cubes ${z_1}^3$, ${z_2}^3$, ${z_3}^3$ des nombres complexes ci-dessus, puis la partie réelle et la partie imaginaire de ${z_1}^3$, de ${z_2}^3$, de ${z_3}^3$.

2. a. Si $z = x + iy = \rho \cdot e^{i\theta}$ est un nombre complexe *(avec y et θ réels et ρ réels supérieur à zéro)*, déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z^3 en fonction de x et de y, puis le module et un argument de z^3 en fonction de ρ et θ.

   b. Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z caractérisé par : z^3 est un nombre réel.

   c. Déterminer et tracer l'ensemble (E') des points M d'affixe z, caractérisé par : z^3 est un nombre réel et $1 \leqslant z^3 \leqslant 8$.

Exercice 3

Dans le plan complexe, on considère la transformation f du plan complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = z^2 + i \cdot \overline{z} + 1 - i$$

1. On considère les points A et B d'affixes respectives :

   $3 + 2 \cdot i \quad ; \quad -3 \cdot i$

   Déterminer l'image de ces deux points par la transformation f.

2. a. Soit M un point du plan. On note $a+i\cdot b$ l'affixe du point M. Exprimer en fonction de a et de b la partie réelle et la partie imaginaire du point M'.

   b. Déterminer une condition sur a et b afin que le point M' appartienne à l'axe des réels.

   c. Déterminer une condition sur a et b afin que le point M' appartienne à l'axe des imaginaires.

Exercice 3

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes :

1. Montrer que : $(1+i)^6 = -8\cdot i$.

2. On considère l'équation $(E) : z^2 = -8\cdot i$

   a. Déduire de 1. un solution de l'équation (E).

   b. L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous écriture algébrique.

3. Déduire également de 1. une solution de l'équation : $(E') : \ z^3 = -8\cdot i$