Exercice 1 : QCM

Cocher la réponse exacte (il y en a une seule)

1) La forme exponentielle de $-2(\cos(\frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{4}))$ est :

$2e^{i\frac{5\pi}{4}}$; $-2e^{i\frac{\pi}{4}}$; $2e^{-i\frac{\pi}{4}}$

2) Soit $z = \sin(\frac{\theta}{2})(\cos(\frac{\theta}{2}) + i\sin(\frac{\theta}{2}))$, $\theta \in]-\pi;0[$

$|z| = \sin(\frac{\theta}{2})$; $|z| = -\sin(\frac{\theta}{2})$; $|z| = 1$

3) une solution de l'équation $2z + \bar{z} = 9 + i$ est :

a) 3 b) i c) 3 + i

4) soit z un complexe , $|z+i|$ est égale a

a) $|z| + 1$ b) $|z-1|$ c) $|iz-1|$

5) soit z un complexe d'argument x alors un argument de $\frac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}$ est

a) $-\frac{\pi}{3} + x$ b) $\frac{2\pi}{3} + x$ c) $\frac{2\pi}{3} - x$

6) la forme exponentielle de $z = \sqrt{2}\, i - e^{i\frac{\pi}{4}}$

a) $e^{-i\frac{\pi}{4}}$ b) $\sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$ c) $\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

Exercice 2

Soient dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O ;\vec{u},\vec{v})$ les points A,B et C d'affixes respectifs : $Z_A = 2$; $Z_B = i$ et $Z_C = 1+3i$.

1) a. Placer les points A,B et C

b. Soit $Z = \frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B}$. Ecrire Z sous forme algébrique.

c. Calculer le module et un argument de Z.

d. Déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

e. En déduire que ABC est un triangle isocèle et rectangle en B.

2) A tout point M(z) du plan, distinct de A, on associe le point M'(z') tel que $z' = \frac{iz}{z-2}$

a. Montrer que $|z'| = \frac{OM}{AM}$

b. Montrer que :si M appartient à la médiatrice du segment [OA] alors M' appartient à un cercle qu'on déterminera le centre et le rayon

c. Montrer que :$(z'-i)(z-2) = 2i$

d. En déduire que : $BM'.AM = 2$

e. En déduire que : si M appartient à un cercle de centre A et de rayon 2 alors M' appartient à un cercle à déterminer le centre et le rayon.

Exercice 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;u,v)$

On considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_1 = 2+2i$, $z_2 = e^{\frac{5i\pi}{6}}$ et $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$

I)

1) Déterminer la forme trigonométrique de z_1 et z_3
2) Déterminer sous forme trigonométrique l'affixe du point D symétrique de B par rapport à $(O, \vec{u})$
3) Déterminer la forme algébrique de z_2
4) Placer avec précision les points A ,B et C dans le plan.
5) Déterminer l'affixe du point G , centre de gravite du triangle ABC
6) Déterminer l'affixe du point E pour que le quadrilatère BAEC soit un parallélogramme

II)

1) Montrer que $z_1\ z_2 = -\left(1+\sqrt{3}\right) + i\left(1-\sqrt{3}\right)$
2) Ecrire $z_1 z_2$ sous forme exponentielle.
3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{13\pi}{12}$ et $\sin\frac{13\pi}{12}$

Exercice 4

Dans les plans rapporté à un repère orthonormé $(O\,;u,v)$, on considère les points A et B d'affixes respectives : $a = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$

1°) a) Ecrire sous forme trigonométrique chacun des nombres a et b .

b) Représenter les points A et B dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1) On pose z = a + b et on désigne par M le point d'affixe z
   a) Montrer que OBMA est un carré.
   b) Donner la forme trigonométrique de z
   c) Calculer alors $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$