EXERCICE 1

Continuité et dérivabilité

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - x - 4 & \text{si } x \leqslant 1 \\ f(x) = \dfrac{x-5}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

1) Montrer que f est continue en 1.
2) f est-elle dérivable en 1 ? Justifier
3) La droite d'équation $x = 0$ est-elle asymptote à $\mathscr{C}_f$? Justifier
4) La droite d'équation $y = 1$ est-elle asymptote à $\mathscr{C}_f$? Justifier.

EXERCICE 2

Etude de fonction

Soit la fonction f définie sur $]-\infty, 1]$ par : $f(x) = 2x\sqrt{1-x}$

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$
2) Sur quelle intervalle la fonction f est-elle dérivable ? Pourquoi ? Déterminer alors la dérivée de la fonction f sur cet intervalle.
3) Dresser le tableau de variation de la fonction f. On donnera la valeur exacte de l'extremum de la fonction f.

Exercice 3

Calcul de limites

Déterminer, en vous justifiant, les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \cos\left(\dfrac{2}{3x-1}\right)$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - 2x$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x + \sin x}{x-1}$

Exercice

f est la fonction définie sur $[0;9]$ par : $f(x) = 6 - \dfrac{5}{x+1}$

1) Étudier les variations de la fonction f sur $[0;9]$.
2) On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$
   a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 9$
   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.