Exercice 1

Dans $\mathscr{P}$ on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :
$z_A = 1 + i$; $z_B = \sqrt{3} - i$; $z_C = (\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)$ et $z_D = 1 + i\sqrt{3}$.

1. Ecrire z_A , z_B et z_D sous forme exponentielle.
2. (a) Vérifier que $z_A.z_C = 2z_D$.
   (b) En déduire la forme exponentielle de z_C.
   (c) Déterminer alors les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
3. (a) Montrer que le triangle OBD est isocèle en O.
   (b) Montrer que le quadrilatère $OBCD$ est un losange.

EXERCIE N2

Soit

$$u = 1 + i \quad \text{et} \quad v = -1 + i\sqrt{3}$$

1. Déterminer les modules de u et v.
2. Déterminer un argument de u et un argument de v.
3. En déduire le module et un argument pour chacune des racines cubiques de u.
4. Déterminer le module et un argument de $\frac{u}{v}$.
5. En déduire les valeurs de

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$$

Exercice 3

1) On donne $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_3 = 1 - i$.

a) Ecrire z_1 , z_2 et z_3 sous la forme trigonométrique.

b) En déduire la forme trigonométrique de $Z = \frac{{z_1}^2 \times {z_2}^2}{{z_3}^3}$

2) *a)* Ecrire Z sous forme algébrique.

b) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$

Exercice 4

On pose $u = 1 + i\sqrt{3}$ et $v = 1 + i$

1) Ecrire sous la forme algébrique $u \times v$.

2) *a)* Ecrire u et v sous la forme exponentielle.

b) Ecrire $u \times v$ sous la forme exponentielle.

3) En déduire $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$

Exercice 5

Soient dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O ;\vec{u},\vec{v})$ les points A,B et C d'affixes respectifs : $Z_A = 2$; $Z_B = i$ et $Z_C = 1+3i$.

1) a. Placer les points A,B et C

b. Soit $Z = \frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B}$. Ecrire Z sous forme algébrique.

c. Calculer le module et un argument de Z.

d. Déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$.

e. En déduire que ABC est un triangle isocèle et rectangle en B.

2) A tout point M(z) du plan, distinct de A, on associe le point M'(z') tel que $z' = \frac{iz}{z-2}$

a. Montrer que $|z'| = \frac{OM}{AM}$

b. Montrer que :si M appartient à la médiatrice du segment [OA] alors M' appartient à un cercle qu'on déterminera le centre et le rayon

c. Montrer que :$(z'-i)(z-2) = 2i$

d. En déduire que : BM'.AM = 2

e. En déduire que : si M appartient à un cercle de centre A et de rayon 2 alors M' appartient à un cercle à déterminer le centre et le rayon.

Exercice 6

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$. On désigne par z_1 la solution de partie imaginaire positive et par z_2 l'autre solution

2) Déterminer le module et un argument de chacune des solutions z_1 et z_2

3) Déterminer le module et un argument de $(z_1)^2$ et $(z_2)^2$

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A,B,A' et B' d'affixes respectives : $1+i\sqrt{3}$, $1-i\sqrt{3}$, $-2+2i\sqrt{3}$ et $-2-2i\sqrt{3}$

4) Déterminer la nature du quadrilatère AA'B'B

5) Démontrer que le triangle AA'B' est rectangle.

6) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $\left|z-1+i\sqrt{3}\right| = 2\sqrt{3}$.