Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}.$$

1 Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2 *a.* Montrer que sa dérivée est définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f'(x) = \frac{x + 4\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}\,(2 + \sqrt{x})^2}.$$

b. Résoudre l'équation :

$$X^2 + 4X - 1 = 0\ ,$$

puis en déduire le signe de $f'(x)$ ainsi que les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.
Dresser alors un tableau de variations complet de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.
On veillera notamment à calculer la valeur de l'extremum de f.

Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\,; \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 4 cm.
Soit f la fonction qui, à tout nombre complexe z différent de $-2\mathrm{i}$, associe :

$$Z = f(z) = \frac{z - 2 + \mathrm{i}}{z + 2\mathrm{i}}.$$

On appelle A et B les point d'affixes respectives $z_A = 2 - \mathrm{i}$ et $z_B = -2\mathrm{i}$.

1 Si $z = x + \mathrm{i}y$, x et y étant deux réels, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction x et y. En déduire la nature de :

a. l'ensemble E des points M d'affixe z tels que Z soit un réel ;

b. l'ensemble F des points M d'affixe z tels que Z soit un imaginaire pur éventuellement nul ;

c. l'ensemble G des points M d'affixe z tels que $|Z| = 1$.

2 Déterminer les ensembles E, F et G sans utiliser les parties réelle et imaginaire de Z.

3 Représenter ces trois ensembles.

4 Calculer $|Z - 1| \times |z + 2\mathrm{i}|$ et en déduire que les points M' d'affixe Z, lorsque le point M d'affixe z parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$ sont tous sur un même cercle dont on précisera l'affixe du centre et le rayon.

Exercice 3

Soit $\theta \in]0, \pi[$ et (E_θ) : $z^2 - 2z - 2i\sin\theta e^{i\theta} = 0$

1./ a)Montrer que : $1 + 2i\sin\theta e^{i\theta} = (e^{i\theta})^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, (E_θ)

2./ On donne $f(z) = z^3 - 4z^2 + 2(2 - i\sin\theta e^{i\theta})z + 4i\sin\theta e^{i\theta}$

a) Calculer f(2)

b) Montrer que : $f(z) = (z-2)(z^2 + bz + c)$ où b et c deux nombres complexes à déterminer

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : f(z)=0

3./ Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(0 ; \vec{u}, \vec{v})$

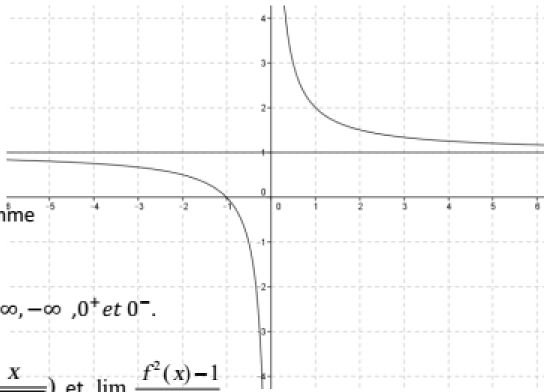
On désigne par A , B et C les points d'affixes respectives : 2 , $1 - e^{i\theta}$ et $1 + e^{i\theta}$

a. Déterminer la forme exponentielle de z_B et z_C

b. Montrer que OBAC est un rectangle

c. Déterminer θ pour que OBAC soit un carré

➢ **Exercice 4:**



La courbe ci-dessus est celle d'une fonction f définie sur IR*, elle admet la droite D: y =1 comme asymptote au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ et D' : x =0 comme asymptote verticale.

1./a.Déterminer graphiquement les limites de f en $+\infty, -\infty$, 0^+ et 0^-.

b. Calculer ces limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f\left(\frac{x}{\sqrt{x-2}}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f^2(x)-1}{f(x)-1}$

2./Soit la fonction définie sur IR par $g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } & x \succ 1 \\ x^3 + 2x - 1 \quad si & x \leq 1 \end{cases}$

a. Montrer que g est continue 1.

b. Monter que l'équation g(x) =0 admet dans $]-\infty, 1]$ une unique solution α puis vérifier que $0 < \alpha < 1$.

3)./Déterminer l'image de$]-\infty, 0[$par la fonction composée gof.

Exercic 5

Le plan est rapporté au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -1 + i\sqrt{3} \quad ; \quad z_B = -1 - i\sqrt{3} \quad ; \quad z_c = 2.$$

1 *a.* Vérifier que

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

b. En déduire la nature du triangle ABC.

c. Déterminer le centre et le rayon du cercle Γ_1 circonscrit au triangle ABC.

2 *a.* Établir que l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z qui vérifient

$$2(z + \overline{z}) + z\overline{z} = 0$$

est un cercle de centre Ω d'affixe -2.
Préciser son rayon.

b. Vérifier que les points A et B sont éléments de Γ_2.

Exercice 6

On rapporte le plan complexe à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On considère l'application complexe de $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f : z \mapsto \frac{\overline{z}}{1+z}.$$

1 Soit A le point d'affixe $z_A = 1 + i$.
Déterminer $f(z_A)$ sous sa forme algébrique.

2 Déterminer les invariants de f, c'est-à-dire les nombres complexes $z = x + iy$ tels que $f(z) = z$.

3 On considère le cercle Γ de centre O passant par A.

a. Mettre z_A sous la forme exponentielle.

b. On considère un point M d'affixe $z_M = \sqrt{2}e^{i\theta}$, $\theta \in [0; 2\pi]$ sur Γ.
Montrer que :

$$f(z_M) = \frac{4\cos^2\theta + \sqrt{2}\cos\theta - 2}{3 + 2\sqrt{2}\cos\theta} - i\frac{\sin\theta(\sqrt{2} + 4\cos\theta)}{3 + 2\sqrt{2}\cos\theta}.$$

c. On note $\mathscr{E}$ l'ensemble image de Γ par f.
Montrer que $\mathscr{E}$ est symétrique par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$.

EXERCICE 1

1 *a.*

$$\begin{aligned}\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} &= \frac{-1 - i\sqrt{3} - 2}{-1 + i\sqrt{3} - 2}\\ &= \frac{-3 - i\sqrt{3}}{-3 + i\sqrt{3}}\\ &= \frac{\left(-3 - i\sqrt{3}\right)^2}{\left(-3 + i\sqrt{3}\right)\left(-3 - i\sqrt{3}\right)}\\ &= \frac{6 + 6i\sqrt{3}}{12}\\ &= \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\\ &= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

b. De la question précédente, on déduit que $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Or, $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$. Donc, $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \frac{\pi}{3}$.

De plus, $z_A = \overline{z_B}$, ce qui signifie que A et B sont symétriques par rapport à $(O\,;\,\vec{u})$, et C se trouve sur $(O\,;\,\vec{u})$ donc CA = CB. Le triangle ABC est donc isocèle en C. Et comme l'angle au sommet principal est égal à $\frac{\pi}{3}$, on en déduit que ABC est équilatéral.

c. Si z représente l'affixe de ce centre :

$$\begin{aligned}z &= \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi, O est le centre du cercle circonscrit à ABC.
Le rayon de Γ_1 est donc OC, soit 2.

2 *a.* Posons $z = x + iy$. Alors,

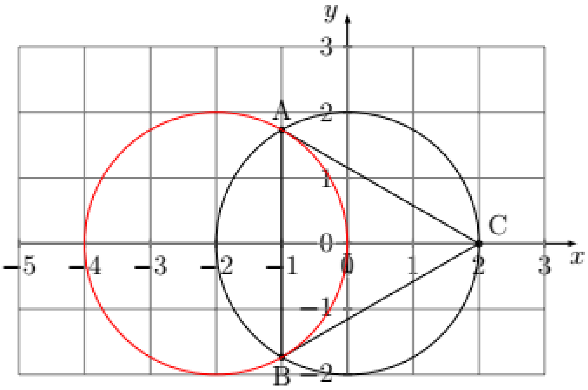
$$\begin{aligned}2\left(z+\overline{z}\right)+z\overline{z}=0 &\Leftrightarrow 2(x+iy+x-iy)+(x+iy)(x-iy)=0\\ &\Leftrightarrow 4x+x^2+y^2=0\\ &\Leftrightarrow (x+2)^2-4+(y-0)^2=0\\ &\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-0)^2=2^2\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des points $M(x\,;y)$ vérifiant l'équation est le cercle de centre $\Omega\,(-2$
et de rayon $r = 2$.

b. On remplace z par z_A dans l'expression $2(z+\overline{z})+z\overline{z}$:

$$\begin{aligned}2(z_A+\overline{z_A})+z_A\overline{z_A} &= 4\Re(z_A)+|z_A|^2\\ &= -4+((-1)^2+\sqrt{3}^2\\ &= -4+4\\ &= 0\end{aligned}$$

z_A satisfait l'équation donc $A \in \Gamma_2$.
Comme $z_B = \overline{z_A}$ et que l'équation est symétrique en z et $\overline{z}$, $B \in \Gamma_2$.



EXERCICE

1 $Z = \dfrac{[x-2+i(y+1)](x-(y+2)i)}{(x+(y+2)i)(x-(y+2)i)}$

$= \dfrac{x(x-2)+(y+1)(y+2)+i[x(y+1)-(x-2)(y+2)]}{x^2-(y-2)^2}$

Donc $\Re(Z) = \dfrac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2-(y-2)^2}$ et $\Im(Z) = \dfrac{-x+2y+4}{x^2-(y-2)^2}$.

a. $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Im(Z) = 0 \Rightarrow -x+2y+4 = 0$.
Ainsi, E est la droite d'équation cartésienne $-x+2y+4=0$.

b. $Z = ki,\ k \in \mathbb{R} \Rightarrow \Re(Z) = 0 \Rightarrow (x-1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$.
F est donc le cercle de centre d'affixe $1-\frac{3}{2}i$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

c. $|Z| = 1 \Rightarrow |z - z_A| = |z - z_B|$.
G est donc la médiatrice de [AB].

2 *a.* $\arg(Z) = \left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)$. $Z \in \mathbb{R} \Rightarrow \arg(Z) = 0 \mod \pi \Rightarrow \left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right) = 0 \mod \pi$.
Donc, A, B et M sont alignés. E est donc la droite (AB).

b. $Z = k\mathrm{i},\ k \in \mathbb{R} \Rightarrow \arg(Z) = \frac{\pi}{2} \mod \pi \Rightarrow \left(\overrightarrow{\mathrm{BM}}, \overrightarrow{\mathrm{AM}}\right) = \frac{\pi}{2} \mod \pi$.
Ainsi, BAM est un triangle rectangle en M. Donc F est le cercle de diamètre [AB].

c. $|Z| = 1 \Rightarrow |z - z_A| = |z - z_B|$.
G est donc la médiatrice de [AB].

3 $Z - 1 = \dfrac{z - 2 + \mathrm{i} - z - 2\mathrm{i}}{z + 2\mathrm{i}} = \dfrac{-2 - \mathrm{i}}{z + 2\mathrm{i}}$ donc $|Z - 1| \times |z + 2\mathrm{i}| = |-2 - \mathrm{i}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.
Si $M \in \mathscr{C}_{(B,\sqrt{5})}$, alors $z = z_B + \sqrt{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et donc $|z + 2\mathrm{i}| = |\sqrt{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = \sqrt{5}$.
Ainsi, $|Z - 1| = 1$. Donc M' sera sur le cercle de centre d'affixe 1 et de rayon 1.

EXERCICE

1
$$\begin{aligned} f(z_{\mathrm{A}}) &= \frac{1 - \mathrm{i}}{2 + \mathrm{i}} \\ &= \frac{(1 - \mathrm{i})(2 - \mathrm{i})}{(2 + \mathrm{i})(2 - \mathrm{i})} \\ &= \frac{1 - \mathrm{i} - 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2}{4 + 1} \end{aligned}$$
$$\boxed{f(z_{\mathrm{A}}) = -\frac{3}{5}\mathrm{i}}$$

2
$$\begin{aligned} f(z) = z &\Leftrightarrow \frac{\overline{x + \mathrm{i}y}}{1 + x + \mathrm{i}y} = x + \mathrm{i}y \\ &\Leftrightarrow x - \mathrm{i}y = (x + \mathrm{i}y)(1 + x + \mathrm{i}y) \\ &\Leftrightarrow x - \mathrm{i}y = x(1 + x) + \mathrm{i}xy + \mathrm{i}y(1 + x) - y^2 \\ &\Leftrightarrow x - \mathrm{i}y = x + x^2 - y^2 + y\mathrm{i}(2x + 1) \\ &\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2y\mathrm{i}(x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ y = 0 \text{ ou } x + 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$
Les invariants de f sont donc : $z_1 = 0$, $z_2 = -1 + \mathrm{i}$ et $z_3 = -1 + \mathrm{i}$.

3 *a.* $|z_{\mathrm{A}}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
Donc $z_{\mathrm{A}} = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, soit $\boxed{z_{\mathrm{A}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$.

b.
$$\begin{aligned} f(z_{\mathrm{M}}) &= \frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1 + \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \\ &= \frac{\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(1 + \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)}{\left(1 + \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(1 + \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta+2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}}}{3+2\sqrt{2}\cos\theta}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cos\theta+2\cos(2\theta)-\mathrm{i}(\sqrt{2}\sin\theta+2\sin(2\theta))}{3+2\sqrt{2}\cos\theta}$$

$$\boxed{f(z_{\mathrm{M}}) = \frac{4\cos^2\theta+\sqrt{2}\cos\theta-2}{3+2\sqrt{2}\cos\theta} - \mathrm{i}\frac{\sin\theta(\sqrt{2}+4\cos\theta)}{3+2\sqrt{2}\cos\theta}}$$

car $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - 1$ et $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$.

c. Remarquons que la partie réelle de $f(z_{\mathrm{M}})$ ne dépend que de $\cos\theta$; donc, elle est paire, ce qui nous pousse à remplacer θ par $-\theta$: on obtient alors :

$$f\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right) = \frac{4\cos^2(-\theta)+\sqrt{2}\cos(-\theta)-2}{3+2\sqrt{2}\cos(-\theta)} - \mathrm{i}\frac{\sin(-\theta)(\sqrt{2}+4\cos(-\theta))}{3+2\sqrt{2}\cos(-\theta)}$$

$$= \frac{4\cos^2\theta+\sqrt{2}\cos\theta-2}{3+2\sqrt{2}\cos\theta} + \mathrm{i}\frac{\sin\theta(\sqrt{2}+4\cos\theta)}{3+2\sqrt{2}\cos\theta}$$

On constate donc que la partie réelle est inchangée et que la partie imaginaire est devenue son opposée ; cela signifie donc que $\mathscr{E}$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

d. Par symétrie, on obtient :