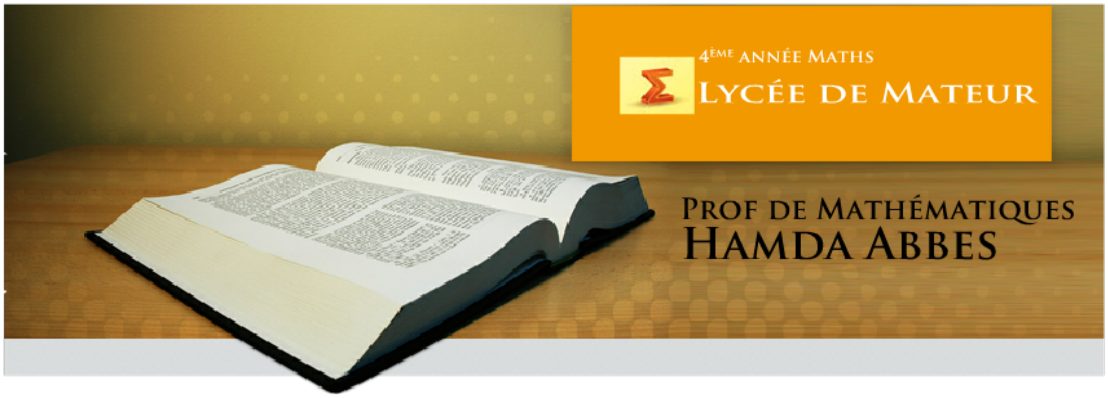
# SÉRIE COMPLEXE CHAPITRE 1




**Exercice 1. QCM** «répondre par **Vrai** ou **Faux** avec justification»

1. On se place dans le plan complexe $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
   (a) Si $z = -6\left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right)$ alors $\arg z \equiv -\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ .
   (b) Si $M$ est un point d'affixe $z$ de partie imaginaire non nulle et $M'$ un point d'affixe $z' = -\overline{z}$ , alors $M$ et $M'$ sont symétriques par rapport à $O$.
2. On considère $A$ le point d'affixe $z_A = -2i$ , $B$ le point d'affixe $z_B = -2$ et $E$ le point d'affixe $z_E = 2 + 2i\sqrt{3}$ .
   (a) L'écriture trigonométrique de $z_E = 2 + 2i\sqrt{3}$ est $4e^{i\frac{\pi}{3}}$ .
   (b) $E$ est situé sur le cercle de centre $O$ et de rayon $R = 2$.
   (c) L'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que $|z + 2i| = |2 + z|$ est la médiatrice du segment $[AB]$.
   (d) L'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que $4z\overline{z} = 1$ est un cercle de rayon $\frac{1}{2}$.

**Exercice 2. QCM** «répondre par **Vrai** ou **Faux** avec justification»

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Soit $f$ la transformation du plan complexe qui, à tout point $M$ d'affixe $z \neq 0$ , associe le point $M'$ d'affixe $z' = 1 + \frac{i}{z}$ .
   (a) L'image par $f$ du point $A$ d'affixe $z_A = 1 + i$ est le point $A'$ d'affixe $z_{A'} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ .
   (b) L'ensemble des points $M$ d'affixe $z \neq 0$ tels que $z'$ soit imaginaire pur est le cercle $\zeta$ de centre $A\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $R = \frac{1}{2}$ , privé du point $O$.
2. On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et on considère la suite $(z_n)$ de nombres complexes définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $\begin{cases} z_0 = 5 \\ z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n \end{cases}$ .On pose $A_n$ le point d'affixe $z_n$ et on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(u_n)$ par $u_n = |z_n|$ .
   (a) La suite $(u_n)$ est géométrique.
   (b) Pour tout entier naturel $n$ , $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = i$ .
   (c) Pour tout entier naturel $n$, le triangle $OA_nA_{n+1}$ est isocèle et rectangle.

**Exercice 3. Ensemble de points**

Le plan est rapporté au repère $(O\ ,\ \overrightarrow{u}\ ,\ \overrightarrow{v}\ )$.On considère les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives :

$$z_A = -1+i \qquad ; z_B = -1-i \qquad ; z_c = 2$$

1. (a) Vérifier que $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ .
   (b) En déduire la nature du triangle $ABC$.
   (c) Déterminer le centre et le rayon du cercle $\Gamma_1$ circonscrit au triangle $ABC$.
2. (a) Établir que l'ensemble $\Gamma_2$ des points $M$ d'affixe $z$ qui vérifient $2(z+\overline{z}) + z\overline{z} = 0$, est un cercle de centre d'affixe $-2$. Préciser son rayon.
   (b) Vérifier que les points $A$ et $B$ sont éléments de $\Gamma_2$.

**Exercice 4. Application complexe $f(x) = \frac{z-2+i}{z+2i}$**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ,\ \overrightarrow{u}\ ,\ \overrightarrow{v}\ )$, unité graphique $4cm$.
Soit $f$ la fonction qui, à tout nombre complexe $z$ différent de $-2i$, associe :

$$Z = f(z) = \frac{z-2+i}{z+2i}.$$

On appelle $A$ et $B$ les point d'affixes respectives $z_A = 2-i$ et $z_B = -2i$.

1. Si $z = x+iy$, $x$ et $y$ étant deux réels, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de $Z$ en fonction de $x$ et $y$. En déduire la nature de :
   (a) l'ensemble $E$ des points $M$ d'affixe $z$ tels que $Z$ soit un réel.
   (b) l'ensemble $F$ des points $M$ d'affixe $z$ tels que $Z$ soit un imaginaire pur éventuellement nul.
   (c) l'ensemble $G$ des points $M$ d'affixe $z$ tels que $|Z| = 1$.
2. Déterminer les ensembles $E$, $F$ et $G$ sans utiliser les parties réelle et imaginaire de $Z$.
3. Représenter ces trois ensembles.
4. Calculer $|Z-1| \times |z+2i|$ et en déduire que les points $M'$ d'affixe $Z$, lorsque le point $M$ d'affixe $z$ parcourt le cercle de centre $B$ et de rayon $\sqrt{5}$ sont tous sur un même cercle dont on précisera l'affixe du centre et le rayon.

**Exercice 5. Racines $n$-ièmes de l'unité**

Soit $n$ un entier naturel non nul. On appelle racine $n$-ième de l'unité tout nombre complexe $z$ tel que $z^n = 1$.
On note $\mathcal{U}_n$ l'ensemble des racines $n$-ièmes de l'unité. Par exemple, $\mathcal{U}_2 = \{-1; 1\}$.

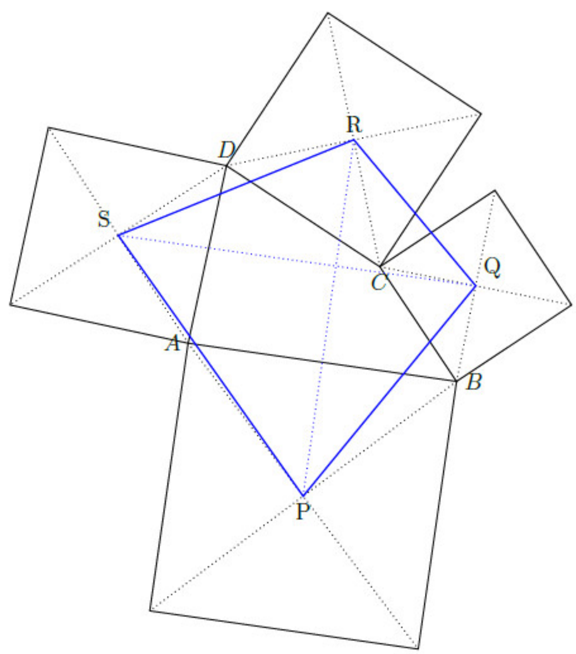
1. (a) Démontrer que $\mathcal{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \ , k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\} \ \right\}$ .
   (b) Démontrer que la somme des racines $n$-ièmes de l'unité est nulle.
   (c) Démontrer que, dans un repère orthonormal $(O\ ,\ \overrightarrow{u}\ ,\ \overrightarrow{v}\ )$, les points $A_k$ $(0 \leq k \leq n-1)$ d'affixes respectives $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ sont les sommets d'un polygone régulier.
2. (a) Soit $Z \in \mathbb{C}$. On appelle racine $n$-ième de $Z$ tout nombre complexe $z$ tel que $z^n = Z$. Soient $R = |Z|$ et $\Theta$ un argument de $Z$. Démontrer que $Z$ admet les $n$ racines $n$-ièmes suivantes : $\sqrt[n]{R}e^{i(\frac{\Theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$ , $0 \leq k \leq n-1$
   (b) Soit $f$ la fonction polynôme définie par $f(x) = x^4 + 1$. Déterminer les racines quatrièmes de $(-1)$ puis en déduire que $f$ peut s'écrire comme un produit de deux fonctions polynômes de degré 2 à coefficients réels.
   (c) Soit $z$ un nombre complexe tel que $1 + z^4 + z^8 = 0$. Démontrer que $z$ est une racine douzième de l'unité.

**Exercice 6. Calcul des valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{5})$, $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $\cos(\frac{4\pi}{5})$**

1. Résoudre dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ le système : $\begin{cases} u+v=-\dfrac{1}{2} \\ uv=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$
2. On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ .Démontrer que $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$.
3. Démontrer que : $\cos\dfrac{2\pi}{5}\cos\dfrac{4\pi}{5}+\sin\dfrac{2\pi}{5}\sin\dfrac{4\pi}{5}=\sin\dfrac{2\pi}{5}$ et $\cos\dfrac{2\pi}{5}\cos\dfrac{4\pi}{5}-\sin\dfrac{2\pi}{5}\sin\dfrac{4\pi}{5}=\cos\dfrac{4\pi}{5}$
4. En déduire que $\cos\dfrac{2\pi}{5}\cos\dfrac{4\pi}{5}=-\dfrac{1}{4}$ .
5. Démontrer alors que : $\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\dfrac{4\pi}{5}=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$ .
6. En déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{5}$ .

**Exercice 7. Théorème de Von Aubel**

Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque de sens direct.
Sur $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$, on construit quatre carrés (extérieurs à $ABCD$) de centres respectifs $P$, $Q$, $R$ et $S$.
*Le but de l'exercice est de démontrer que les diagonales de $PQRS$ sont perpendiculaires et de même longueur.*

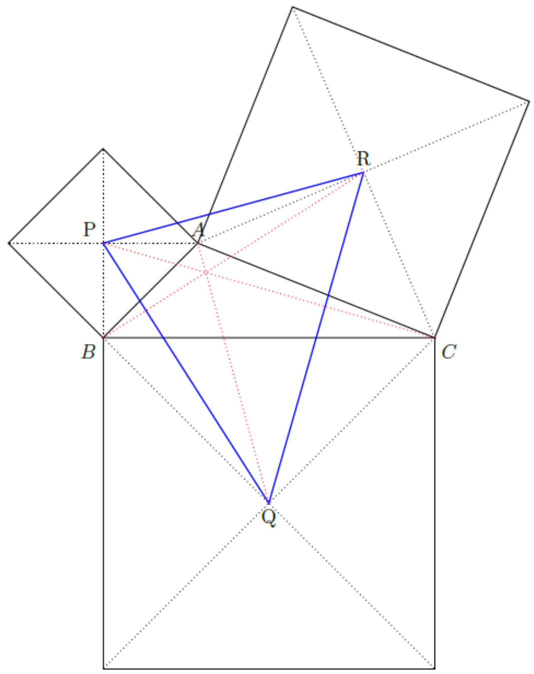



On note $a$, $b$, $c$, $d$, $p$, $q$, $r$ et $s$ les affixes respectives des points $A$, $B$, $C$, $D$, $P$, $Q$, $R$ et $S$ dans un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ de sens direct.

1. Démontrer que dans le carré construit sur $[AB]$, on a : $p=\dfrac{a-ib}{1-i}$ .Établir des relations analogues pour $q$, $r$ et $s$.
2. Calculer $\dfrac{s-q}{r-p}$ puis conclure.

## Exercice 8. Point de Vecten

Soit $ABC$ un triangle quelconque de sens direct.
On construit trois carrés de centres respectifs $P$, $Q$ et $R$ qui s'appuient extérieurement sur les côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.




On note $a$, $b$, $c$, $p$, $q$ et $r$ les affixes respectives des points $A$, $B$, $C$, $P$, $Q$ et $R$ dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\ )$ de sens direct.

1. Démontrer que les triangles $ABC$ et $PQR$ ont le même centre de gravité.
2. Démontrer que dans le carré construit sur $[AB]$, on a : $p = \dfrac{a - ib}{1 - i}$ .Établir des relations analogues pour $q$ et $r$.
3. Démontrer que les droites $(AQ)$ et $(PR)$ sont perpendiculaires. En déduire que les droites $(AQ)$, $(BR)$ et $(CP)$ sont concourantes. *Ce point de concours est appelé le point de Vecten du triangle ABC.*

## Exercice 9. Cocyclicité

1. Soient quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$ d'affixes respectives $a$, $b$, $c$ et $d$. En considérant les angles $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ et $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right)$, montrer l'équivalence suivante : $A,\ B,\ C,\ D$ cocylciques $\Longleftrightarrow \dfrac{(d-a)(c-b)}{(d-b)(c-a)} \in \mathbb{R}$ .
2. On considère maintenant les quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$ d'affixes respectives $a = 4+4i$, $b = 6+2i$, $c = 2i$ et $d = 3+i+\sqrt{10}e^{\frac{4i\pi}{3}}$ .
   (a) Montrer qu'ils sont cocycliques.
   (b) Déterminez le nombre $\omega$ tel que $\arg(d - \omega) = \dfrac{4\pi}{3}$ .
   (c) Montrer que le point $\Omega$ d'affixe $\omega$ est le centre du cercle sur lequel se trouve $A$, $B$, $C$ et $D$.
3. Montrer que le triangle $A\Omega C$ est rectangle en $\Omega$ .

Hamda Abbes