Nombres complexes

- **Ensemble des points M tel que $OM = r$:**

  Il faut retenir que : $OM = r \Leftrightarrow$ M décrit le cercle de centre O et de rayon r.

  Exemple 1 : Déterminer l'ensemble $E = \{M(z)$ tel que : $|z| = 2\}$.

  Exemple 2 : Déterminer l'ensemble $E = \{M(z)$ tel que : $|z - 2i| = 3\}$.

  Exemple 3 : Déterminer l'ensemble $E = \{M(z)$ tel que : $|(1+i)z - 2i| = 1\}$.

  Exemple 4 : Déterminer l'ensemble $E = \{M(z)$ tel que : $|(1-i)\bar{z} - i| = 3\}$.

- **Ensemble des points M tel que : $\frac{\text{AM}}{\text{BM}} = r$**

  Il faut retenir que : $M \neq B$; $\frac{AM}{BM} = 1 \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow M$ décrit la médiatrice de [AB].

  Exemple 1 : Déterminer l'ensemble $E = \{M(z)$ tel que : $|z + 2i| = |z - 1 + i|\}$.

  Exemple 2 : Déterminer l'ensemble $E = \{M(z)$ tel que : $\left|\frac{(1+i\sqrt{3})\bar{z} - 1}{z+i}\right| = 2\}$.

- **Ensemble des points M'(z') tel que : z'=*f*(z) est réel ou imaginaire :**

  Il faut retenir que :

  - z est réel $\Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$.
  - z est imaginaire $\Leftrightarrow \text{Ré}(z) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = -z$.
  - $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{v}$ est non nul

    $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** $\Leftrightarrow \frac{aff(\vec{u})}{aff(\vec{v})}$ est **réel**.

    $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** $\Leftrightarrow \frac{aff(\vec{u})}{aff(\vec{v})}$ est **imaginaires.**

  Exemple 1 : Déterminer l'ensemble $E = \{M(z)$ tel que : $z' = \frac{z-1}{z^2} \in IR\}$.

  Exemple 2 : Déterminer l'ensemble $E = \{M(z)$ tel que : $z' = \frac{\bar{z}}{z+i} \in IR\}$.

  Exemple 3 : Déterminer l'ensemble $E = \{M(z)$ tel que : $z' = \frac{iz-2}{z-i} \in iIR\}$.

  Exemple 4 : Déterminer l'ensemble $E = \{M(z)$ tel que : $z' = \frac{(i+1)z-1}{z+i} \in IR\}$

- **Ensemble des points M(z) tel que $z = z_0 + e^{i\theta}; \theta \in [\alpha, \beta]; A(z_0)$:**

  Il faut retenir que : $z = z_0 + e^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} |z - z_0| = 1 \\ \arg(z - z_0) \equiv \theta(2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow$ AM =1

  $M(z) \in \zeta_{(A(z_0),R)} \Leftrightarrow |z - z_0| = R \Leftrightarrow$ il existe $\theta \in IR, z = z_0 + \text{R}e^{i\theta}$

EXOS COMPLEXES

Ensemble des points M(x ; y) tels que f(z) soit un réel ou un imaginaire pur

1. 1°)Résoudre dans C les équations suivantes :

a) $\frac{z-2i}{z-1-i}=3$; b) $\frac{z-2i}{z-1-i}=4i$

2°)Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité: 4cm).

A tout point m d' affixe z ($z\neq 1+i$), on associe le point M d' affixe $Z=\frac{z-2i}{z-1-i}$.

On pose z=x+yi et Z=X+Yi.

a)Exprimer X et Y en fonction de x et y.

b)Déterminer et construire l' ensemble (E) des points m(x,y) du plan tels que Z soit un réel.

c)Déterminer et construire l' ensemble (F) des points m(x,y) du plan tels que Z soit un imaginaire pur.

2. $\mathbb{C}$ désigne l' ensemble des nombres complexes et $\mathbb{C}'$ le sous-ensemble des nombres dont la partie réelle est nulle.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ et f est l' application de $\mathbb{C}'$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z)=\frac{(z-1)(\overline{z}+1)}{z+\overline{z}}$.

1°)Soit $z\in\mathbb{C}'$ et Z=f(z) avec $z=x+yi$ et $Z=X+Yi$; x, y, X, Y étant des réels.

Calculer X et Y en fonction de x et y.

2°)Calculer f(1) et f(1+i).

3°)Déterminer l' ensemble (E) des points M d' affixe z tels que Z soit un imaginaire pur.

4°)Déterminer l' ensemble (F) des points M d' affixe z tels que la partie imaginaire Y de Z=f(z) soit une constante réelle donnée k.

5°)Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}'$, on a : $f(z)=f\left(-\frac{1}{\overline{z}}\right)$.

3. **(forme algébrique)**

Soit f l' application qui à tout nombre complexe différent de 1 associe : $f(z)=z'=1+\frac{4}{\overline{z}-1}$.

Soit M et M' les images respectives de z et z' dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°)On pose z= x + iy et z' = x' + iy' (où x, y, x' , y' sont quatre réels). Calculer x' et y' en fonction de x et y.

2°)Déterminer l' ensemble des points M tels que la partie réelle de z' soit égale à - 1.

3°)Soit le point A d' affixe 1.

a)Démontrer que $\overrightarrow{AM'}=\frac{4}{AM^2}\overrightarrow{AM}$.

b)En déduire l' ensemble des points M tels que M' soit confondu avec M.

4. **(forme algébrique)**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on associe à tout nombre complexe z distinct de $-i$, le nombre complexe $T=\frac{z+1}{-i(z+i)}$.

1. Calculer le complexe T_0 obtenu pour $z=i$; déterminer le module et un argument de T_0.

2. Dans cette question, on pourra poser $T=U+iV$ et $z=x+iy$ où U, V, x, y sont réels.

2.a. Déterminer et représenter l'ensemble C des point M d'affixe z tel que T soit réel.

2.b. Déterminer et représenter l'ensemble D des points M d'affixe z tel que T soit imaginaire pur.
Soit A le point d'affixe -1 et B le point d'affixe $-i$. Donner une interprétation géométrique de $|T|$.
Déterminer et construire l'ensemble Δ des points M d'affixe z tels que $|T| = 1$.

5. **(forme trigonométrique)**
On considère le nombre complexe :

$$a=\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

1°)Calculer a^2 puis déterminer son module et son argument .
2°)a)En déduire le module de a et justifier qu' une mesure de l' argument de a est $-\frac{5\pi}{12}$.
b)Représenter dans un repère orthonormal direct les points A , B et C d' affixes respectives :a , − a et a^2 .
3°)Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ puis de $\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)$ ainsi que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
4°)Déterminer puis représenter sur le graphique précédent l' ensemble (E) des points M d' affixe z tels que $a^2 z$ soit réel.
5°) Déterminer puis représenter sur le graphique précédent l' ensemble (F) des points M d' affixe z tels que $\frac{z-a}{z+a}$ soit imaginaire pur non nul .

6. **(forme trigonométrique)**
Soit l' application f définie par $f(z)=\frac{z-2i}{z+1}$ pour les nombres complexes z différents de -1.
On désigne par A, B, M et M' les points du plan complexe d' affixes respectives -1, 2i, z, f(z).
1°)Calculer le module et un argument de f(i).
2°)Déterminer et représenter l' ensemble (E_1) des points du plan d' affixes z tels que $|f(z)|=1$.
3°)Interpréter géométriquement Arg(f(z)) puis déterminer et représenter:
a)l' ensemble (E_2) des points M du plan d' affixes z tels que f(z) soit un réel strictement négatif.
b)l' ensemble (E_3) des points M du plan d' affixes z tels que f(z) soitun imaginaire pur.
4°)a)Calculer, pour tout z différent de -1, $|f(z)-1|\cdot|z+1|$.
b)On suppose que M décrit le cercle de centre A et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
Montrer que M' appartient à un cercle C que l' on déterminera.

Théorème et définition :

Il existe un ensemble appelé ensemble de nombres complexes, noté $\mathbb{C}$ et vérifiant les propriétés ci-dessous

- L'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble de nombres réels $\mathbb{R}$
- Il existe un élément de $\mathbb{C}$, noté i, tel que $i^2 = -1$
- L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$
- Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de la façon unique sous la forme $z = a+ib$, où a et b sont des réels

Conséquences

Soit $z = a+ib$, et $z' = a'+ib'$, où a, a', b, b' sont des réels. Alors

$z = z'$ si et si et seulement si, $a = a'$ et $b = b'$

$z = 0$ si et seulement si $a = b = 0$

z est réel si et seulement si $b = 0$

z est imaginaire si et seulement si $a = 0$

EXERCICE N°1.

Soit le nombre complexe $z = 1 + 2i$. *Ecrire sous la forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :* $2 + iz$; $(2 - z)^3$; $\frac{i}{1+iz}$ *et* $\frac{1-\bar{z}}{z}$

Conjugué d'un nombre complexe :

Définition :

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$ où a et b deux réels. On appelle conjugué de z le complexe noté et défini par : $\bar{z} = a - ib$.

Propriétés

* Pour tous les nombres complexes z et z', $\overline{z+z'} = \bar{z} + \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \bar{z}\,\overline{z'}$; $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$; $n \in \mathbb{N}^*$
* Pour tout nombre complexe z et tout nombre complexe non nul z',
$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$; $\overline{\left(\frac{1}{z'^n}\right)} = \frac{1}{\left(\overline{z'}\right)^n}$, $n \in \mathbb{Z}$
* $z = \overline{z'}$ si et seulement si z est réel
* $z = -\bar{z}$ si et seulement si z est imaginaire

EXERCICE N°2.

Pour tout nombre complexe $z = x + iy$ distinct de 1, on fait associer le nombre complexe $z' = \frac{z-i}{z+1}$

1) En posant $z' = x' + iy'$; Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

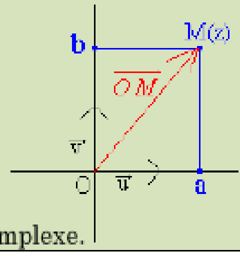
2) Déterminer l'ensemble $\mathcal{H}$ des points $M(z)$ tels que z' soit réel.

Affixe d'un point, affixe d'un vecteur :

Définition :

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

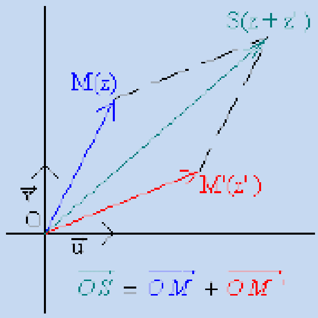
- Au point M de coordonnées $(a\ ;\ b)$, on peut associer le nombre complexe $z = a + ib$. On dit que $z = a + ib$ est l'affixe de M.
- Au vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(a\ ;\ b)$, on peut associer le nombre complexe $z = a + ib$. On dit que $z = a + ib$ est l'affixe de $\vec{w}$.
- Lorsqu'on repère un point ou un vecteur par son affixe dans un repère orthonormé direct, on dit qu'on se place dans le plan complexe.



Propriétés :

Si M a pour affixe $z = a + ib$ et si M' a pour affixe $z' = a' + ib'$, avec a, b, a', b' réels, alors :

- Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z = (a' - a) + (b' - b)i$.
- $OM = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- $MM' = \|\overrightarrow{MM'}\| = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2}$.
- Le milieu I de [MM'] a pour affixe $z_I = \frac{z + z'}{2}$.
- Si $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$ alors $\mathrm{aff}(\overrightarrow{OS}) = z + z'$.
- Si $\overrightarrow{w}$ a pour affixe z et $\overrightarrow{w'}$ pour affixe z', alors $\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w'}$ a pour affixe $z + z'$.
- Si k est un réel, alors $k\overrightarrow{w}$ a pour affixe kz.



EXERCICE N°3.

1) Calculer le module de chacun des complexes suivants :

$z_1 = 1 + \sqrt{2} + 2i$; $z_2 = (3 + 4i)^3(1 - i)$ et $z_3 = \frac{1}{1+i} - \frac{1}{1-3i}$

2) Soit $z = x + iy$. Exprimer en fonction de x et y le module du nombre complexe $T = i + z - \frac{1}{\bar{z}}$

Propriété

Soit $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ deux vecteurs tels que $\overrightarrow{w_1}$ non nul.

Les vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ sont colinéaires, si et seulement si, $\dfrac{z_{\overrightarrow{w}}}{z_{\overrightarrow{w_1}}}$ est réel

Propriété

Soit $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ deux vecteurs tels que $\overrightarrow{w_1}$ non nul

Les vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ sont orthogonaux si et seulement si $\dfrac{z_{\overrightarrow{w}}}{z_{\overrightarrow{w_1}}}$ est imaginair

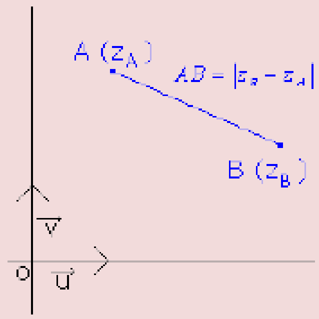
Module d'un nombre complexe :

Définition :

Soit le nombre complexe z de forme algébrique a + ib et soit M le point d'affixe z.
On appelle module de z le nombre réel positif $r = OM = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\,\overline{z}}$.
On note $r = |z|$.

Remarques :

- La notation | z | ne risque pas de prêter à confusion avec la notation de la valeur absolue puisque lorsque x est un nombre réel, on a $r = OM = |x|$.
- Pour un réel x, | x | pourra être lu indifféremment "valeur absolue de x" ou "module de x".
- Pour un nombre complexe non réel z , | z | sera lu impérativement "module de z".
- Si $\overrightarrow{w}$ est un vecteur d'affixe z alors $\|\overrightarrow{w}\| = |z|$.
- A et B deux points 'affixes respectives z_A et z_B alors $AB = |z_B - z_A|$.



Propriétés

Soit deux nombres complexes z et z'

$|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$; $|zz'| = |z||z'|$; $|z+z'| \le |z| + |z'|$; $|kz| = |k||z|, k \in \mathbb{R}$ $|\overline{z}| = |z|$;

$|z^n| = |z|^n, n \in \mathbb{N}^*$; $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}, z \neq 0$; $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}, z \neq 0$; $\left|\dfrac{1}{z^n}\right| = \dfrac{1}{|z|^n}, z \neq 0, n \in \mathbb{Z}$

EXERCICE N° 4

1) Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants : $\frac{8-i}{1-2i}$; $\frac{10}{3-i}$ et $\left(\frac{i-1}{2}\right)(1+i)^2$

2) Marquer les points A, B et C d'affixes respectives : $2+3i$, $3+i$ et $-1-i$

3) *a)* Montrer que ABC est un triangle rectangle en B.

b) Trouver l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un rectangle.

4) *a)* On pose $I = A * C$, trouver l'affixe du point I.

b) Déterminer et construire les ensembles suivants :

$E = \{M(z) \in P / |z - 2 - 3i| = |z + 1 + i|\}$ et $F = \{M(z) \in P / |2\overline{z} - 1 + 2i| = 5\}$

EXERCICE N°5

On donne les points A et B d'affixes respectives : $z_A = \frac{3+i}{1+i}$ et $z_B = (-3 + 4i)\left(\frac{1-2i}{5}\right)$

1) Ecrire z_A et z_B sous la forme algébrique.

2) Placer les points A et B.

3) Montrer que le triangle OAB est isocèle rectangle.

4) Déterminer l'affixe du point C tel que $OACB$ soit un carré.

EXERCICE N 6

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit les points $A(1)$; $B\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$ et $C(1 + i\sqrt{3})$.

1) Déterminer OC et $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OC}})$ puis placer le point C.

2) Montrer que le triangle ABC est équilatéral. Placer alors les points A et B.

3)a) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ADBC$ soit un losange. b) Calculer l'aire de $ADBC$ et déterminer l'affixe de son centre I.

EXERCICE N 7

Soient les points A, B, C et I d'affixes respectives : $z_A = -2i$; $z_B = 1 + i$; $z_C = 4 + 2i$ et $z_I = 2$.

1) *a)* placer les points A, B, C et I.

b) Vérifier que I est le milieu du segment $[AC]$.

2) Montrer que le triangle ABC est isocèle

3) Déterminer l'affixe z_D du point D pour que $ABCD$ soit un losange.

4) *a)* A tout point M d'affixe $z \neq 4 + 2i$ on associe le point M' d'affixe : $z' = \frac{2z+4i}{z-4-2i}$

Montrer que : $OM' = \frac{2AM}{CM}$

b) Montrer que si le point M décrit la médiatrice du segment $[AC]$ alors le point M' décrit un cercle que l'on précisera.