Exercice 1 (5 points) :

Dans le plan muni d'un repère $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la droite Δ d'équation $8x + 9y = 300$.

1. Déterminer l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $M \in \Delta$ avec $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$.
2. En déduire l'ensemble des points $M(x;y) \in \Delta$ avec $(x;y) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 2 (15 points) :

1. a) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 ? Justifier.
   b) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 ? Justifier.
   c) En déduire que $6^{40} \equiv 1 \ (11)$ et que $6^{40} \equiv 1 \ (5)$.
   d) Démontrer que $6^{40} - 1$ est divisible par 55.
2. Dans cette question x et y désignent des entiers relatifs.
   a) Montrer que l'équation
   $$(E) \ : \ 65x - 40y = 1$$
   n'a pas de solution.
   b) Montrer que l'équation
   $$(E') \ : \ 17x - 40y = 1$$
   admet au moins une solution.
   c) Déterminer, à l'aide de l'algorithme d'Euclide, un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E').
   d) Résoudre l'équation (E').
   En déduire qu'il existe un unique naturel x_0 inférieur à 40 tel que :
   $$17x_0 \equiv 1 \quad (40)$$
3. Pour tout entier naturel a, démontrer que :
$$\text{Si} \quad \begin{cases} a^{17} \equiv b & (55) \\ a^{40} \equiv 1 & (55) \end{cases} \quad \text{alors} \quad b^{33} \equiv a \quad (55)$$

DS 4è Math n° 3 . le 16 dec 20

I ① On cherche $x, y \in \mathbb{Z}$ tq $8x + 9y = 300$. (E)

On a $8 \times (-1) + 9 \times 1 = 1$

donc $8 \times (-300) + 9 \times 300 = 300$ d'où une solut° particulière de (E)

et par différence avec (E) on a

$8(x+300) + 9(y-300) = 0$.

d'où $8(x+300) = -9(y-300)$ (✱)

donc $\left.\begin{array}{l} 8 \text{ divise } 9 \times (y-300) \\ 8 \wedge 9 = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow$ d'après le th de Gauss 8 divise $y - 300$

donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel $y - 300 = 8k$

on reportant dans (✱) on a alors $8(x+300) = -9 \times 8k$

$\Longrightarrow x + 300 = -9k$.

donc finalement $\begin{cases} x = -9k+300 \\ y = 8k+300 \end{cases}$

Vérifions que (x,y) solution de (E).

on a $8x + 9y = 8(-9k-300) + 9(8k+300)$

$= -8 \times 300 + 9 \times 300$

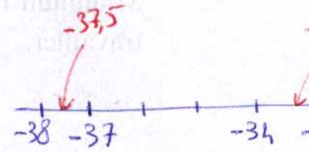
$= 300$

Donc les solutions du problème sont les points M ayant pour coordonnées $(x;y) \in \{(-9k-300 ; 8k+300), k \in \mathbb{Z}\}$

② On veut de plus $x, y \in \mathbb{N}$

d'où $\begin{cases} -9k+300 \geq 0 \\ 8k+300 \geq 0 \end{cases}$ (avec $x = -9k+300$; $y = 8k+300$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9k \leq 300 \\ 8k \geq -300. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \leq -\frac{100}{3} = -33 - \frac{1}{3} \\ k \geq -\frac{75}{2} = -37 - \frac{1}{2} \end{cases}$



$\Leftrightarrow k \in \{-37, -36, -35, -34\}$

Il y a donc 4 points de Δ tels que $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.

$\{ M(6;28) ; M(15;20) ; M(24;12) ; M(33,4) \}$

II ① ⓐ $6^2 = 36 \equiv 3 \ (11)$

$\Rightarrow 6^4 \equiv 3^2 \equiv 9 \ (11)$ (par compatibilité des congruences avec la p

$\Rightarrow 6^5 \equiv 54 \equiv -1 \ (11)$

$\Rightarrow 6^{10} \equiv +1 \ (11)$ (En élevant au carré).

donc le reste de la division de 6^{10} par 11 est +1.

ⓑ

$6 \equiv 1 \ (5)$

$\Rightarrow 6^4 \equiv 1 \ (5)$ donc le reste de la division de 6^4 par 5 est 1.

ⓒ $6^{10} \equiv 1 \ (11)$ d'où $(6^{10})^4 \equiv 1^4 \ (11)$

c'est-à-dire $6^{40} \equiv 1 \ (11)$.

$6^5 \equiv 1 \ (5) \Rightarrow (6^5)^8 \equiv 1^8 \ (5)$

$\Rightarrow 6^{40} \equiv 1 \ (5)$.

ⓓ d'après ⓒ $\left.\begin{array}{l} 11 \text{ divise } 6^{40} - 1 \\ 5 \text{ divise } 6^{40} - 1 \\ 5 \wedge 11 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 5 \times 11 \text{ divise } 6^{40} - 1$.

② ⓐ Supposons que x, y solution de l'équation (E).

alors d'après le th de Bezout $65 \wedge 40 = 1$.

or $5 \mid 65$ et $5 \mid 40$ d'où $PGCD(65, 40) \geq 5$ donc $65 \wedge 40 \neq 1$

Absurde !

D'où (E) n'admet pas de solution.

ⓑ $40 = 2^3 \times 5$; 17 est un nombre premier

donc $17 \wedge 40 = 1$ d'où d'après le th de Bezout il existe $u, v \in \mathbb{Z}$

tels que $17u + 40v = 1$ donc (E') admet des solut°.

ⓒ Utilisons l'algorithme d'Euclide pour déterminer une solution particulière de (E').

$40 = 2 \times 17 + 6$

$17 = 2 \times 6 + 5$

$6 = 5 + 1$

Donc $1 = 6 - 5$

$= 6 - (17 - 2 \times 6)$

$= 3 \times 6 - 17$

$= 3 \times (40 - 2 \times 17) - 17$

$= 3 \times 40 - 7 \times 17$ donc le couple $(-7, -3)$ solution de (E

ⓓ On a $(-7) \times 17 - (-3) \times 40 = 1$

et (E'): $x \times 17 - y \times 40 = 1$

donc par différence $17(-7 - x) - 40(-3 - y) = 0$

$\iff 17(7 + x) = 40(3 + y) \quad (*)$

Donc $\left.\begin{array}{l} 17 \mid 40(3+y) \\ 17 \wedge 40 = 1 \text{ (d'après 2b)} \end{array}\right\} \Longrightarrow$ d'après le th de Gauss $17 \mid 3 + y$

Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tq $3 + y = 17k$

En reportant dans (*) $17(7+x) = 40\times 17k$ donc $7+x = 40k$

donc finalement $\begin{cases} x = 40k-7 \\ y = 17k-3 \end{cases}$

Vérifions que (x,y) solution de (E').

$17x - 40y = 17(40k-7) - 40(17k-3)$

$= 17(-7) - 40(-3) = 1$

donc les solutions de (E') sont $S = \{(40k-7\,;\,17k-3),\ k\in\mathbb{Z}\}$

Cherchons les solutions de (E') tq $0 \leq x \leq 40$.

On a $x = 40k-7$, $y = 17k-3$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

et $0\leq x\leq 40 \iff 0 \leq 40k-7 \leq 40$

$\iff 7 \leq 40k \leq 47$

$\iff k = 1$

Remarque :
$17x \equiv 1 \ (40)$
$\iff 17x - 40k = 1$ avec $k\in$
$\iff (x,k)$ solution de E'

donc l'unique solution de (E') avec $0\leq x\leq 40$ est le couple (x_0,y_0) correspondant à $k=1$, c'est-à-dire $x_0 = 33$, $y_0 = 14$

On a alors $17x_0 - 40\times 14 = 1$ donc $17x_0 = 1 + 14\times 40$.

d'où $17x_0 \equiv 1 \ (40)$.

3

$a^{17} \equiv b \ (55)$ et $a^{40} \equiv 1 \ (55)$

$a^{17} \equiv b \ (55) \Rightarrow (a^{17})^{33} \equiv b^{33} \ (55)$

$\Rightarrow a^{17\times 33} \equiv b^{33} \ (55)$

mais d'après ② $17\times 33 = 1 + 14\times 40$ donc $b^{33} \equiv a^{1+14\times 40} \ (55)$

$\equiv a \times (a^{40})^{14} \equiv a^{1} \equiv a \ (55)$