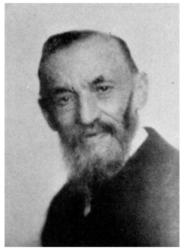
LA RÉCURRENCE **Dr. Amine Touati**



- Pour introduire l'ensemble N des entiers naturels, on dispose de deux axiomatiques possibles :
  l'axiomatique ordinale ;
  l'axiomatique de Peano (du nom d'un célèbre logicien et mathématicien italien, 1858-1932).

Le choix a son importance, car dans la première, le « principe » de récurrence est un théorème que l'on démontre, alors que dans la seconde, c'est un axiome. Il vaut mieux savoir ce que l'on dit.
Je préfère personnellement la première axiomatique, plus naturelle, celle que développe Dany-Jack Mercier dans son cours sur la construction de N. Dans ce même papier, des éléments sur l'axiomatique de Peano sont donnés à la fin.
A l'époque héroïque des mathématiques modernes, celle où j'étais élève, on gobait bien sagement l'axiomatique de Peano, sans la comprendre vraiment. On en trouve trace dans l'excellent Aleph1 d'algèbre, terminale CE.
Il suffira pour nous d'avoir les idées claires sur un certain nombre de points, car il n'est pas question ici de faire une construction axiomatique de N .

- Un ensemble est dit *bien ordonné* s'il est muni d'une relation d'ordre ℂ telle que toute partie non vide de E possède un plus petit élément.

Il est clair qu'une telle relation induit nécessairemet un ordre total sur E (il suffit de considérer la partie $\{a, b\}$)

- Dans l'axiomatique ordinale, l'ensemble N des entiers naturels est un ensemble non vide qui vérifie les axiomes suivants

> N est bien ordonné c'est-à-dire que toute partie non vide de N possède un plus petit élément ;
> N n'est pas majoré ;
> Toute partie non vide majorée de N possède un plus grand élément.

- Ces propriétés fondent ce que l'on appelle **le principe de récurrence** : attention, dans le cadre de cette axiomatique, ce principe est un théorème que l'on démontre.

> Soit $E \subset$ N.
> Si $0 \in E$ et si l'implication $n \in E \Rightarrow n + 1 \in E$ est vraie,
> alors E = N.

Démonstration
On raisonne par l'absurde en supposant que $E \neq$ N.
Le complémentaire F de E dans N n'est pas vide, donc possède un plus petit élément, que l'on peut noter p, qui n'appartient pas à E bien évidemment.
p n'est pas nul, car on sait que $0 \in E$. Comme p est le plus petit élément de F, $n = p - 1$ n'appartient pas à F, donc appartient à E. Mais alors, d'après l'implication, $n + 1 = p$ appartient à E, ce qui est contradictoire.
On peut énoncer ce résultat par rapport à une propriété P dépendant d'un entier n.

> Soit P une propriété définie sur N.
> Si :
> $P(0)$ est vraie, (1)
> pour tout n entier naturel, si la propriété $P(n)$ est vraie, alors la propriété $P(n + 1)$ est vraie (autrement dit, la propriété P est *héréditaire*), (2)
> alors pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie.

Démonstration
Il suffit d'appliquer le théorème général à l'ensemble E des entiers qui vérifient la propriété P.

- Ce principe de récurrence, souvent appelé récurrence *simple*, admet quelques variantes.

Corollaire 1 : récurrence à partir d'un entier n_0

> Soit P une propriété définie sur pour n entier naturel supérieur ou égal à n_0.
> Si :
> $P(n_0)$ est vraie, (1)

> pour tout n entier naturel supérieur ou égal à n_0, si la propriété $P(n)$ est vraie, alors la propriété $P(n+1)$ est vraie, (2)
> alors pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie.

Démonstration
Il suffit ici d'appliquer le principe de récurrence simple à la propriété définie sur � par $Q(n) = P(n + n_0)$.

Corollaire 2 : récurrence sur deux entiers consécutifs

> Soit P une propriété définie sur pour n entier naturel supérieur ou égal à n_0.
> Si :
> $P(n_0)$ et $P(n_0 + 1)$ est vraie, (1)
> pour tout n entier naturel supérieur ou égal à n_0, si les propriété $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies, alors la propriété $P(n+2)$ est vraie, (2)
> alors pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie.

Démonstration
Il suffit ici d'appliquer le principe de récurrence précédent à la propriété définie sur � par $Q(n) = P(n)$ et $P(n + 1)$.

La récurrence forte

> Soit P une propriété définie sur pour n entier naturel supérieur ou égal à n_0.
> Si :
> $P(n_0)$ est vraie, (1)
> pour tout n entier naturel supérieur ou égal à n_0, si les propriété $P(n_0)$, $P(n_0 + 1)$, $P(n_0 + 2)$, ..., $P(n)$ sont vraies, alors la propriété $P(n + 1)$ est vraie, (2)
> alors pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie.

Démonstration
On considère la propriété définie pour n entier naturel n_0 par :

$$Q(n): \quad \text{pour tout } k \text{ entier compris entre } n_0 \text{ et } n, P(k)$$

Il est immédiat de constater que $Q(n_0)$ est vraie.

Soit n un entier arbitraire supérieur ou égal à n_0. Si l'on suppose que $Q(n)$ est vraie, de la propriété (2), on déduit que $P(n + 1)$ est vraie, et donc que $Q(n + 1)$ l'est aussi.

D'un point de vue pédagogique, bien insister sur la rédaction d'un raisonnement par récurrence. Les différentes étapes doivent apparaître (il n'est pas inutile d'essayer d'autres valeurs pour voir, même si une seule suffit, mais on ne sait jamais, des cas particuliers peuvent apparaître).
Une phrase de conclusion du style :

> « la propriété d'une part étant vraie pour $n = 0$ et d'autre part étant héréditaire, est vraie pour tout entier naturel n »

peut être demandée à des élèves.

Quelques exercices

1. ■ Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $n < 2^n$.

2. ■ Montrer qu'à partir d'un certain rang, on a : $n^2 < 2^n$.

3. ■ Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a :
$$\frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leq \binom{2n}{n}.$$

4. ■ Montrer que tout entier n supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier *(un exemple de récurrence forte)*

5. ■ Soit n un entier naturel. Montrer qu'entre n et $2n$, il y a toujours un carré.

6. ■ Quelle est la dérivée n^e de la fonction définie pour x réel par $f(x) = x^2 \times e^x$?

7. ■ Calculer la dérivée n^e de $f_n(x) = x^{n-1}\ln x$ pour n entier naturel non nul.

8. ■ Soit a un réel positif. Monter que pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geq 1+na$.

9. ■ Que vaut pour tout entier naturel n $\sum_{i=1}^{n} i i!$?

10. ■ Calculer pour tout entier naturel n $S_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k)^2 (-1)^k$.

11. ■ Soit n 2 et $u_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$. Montrer que u_n peut s'écrire comme le quotient d'un entier impair par un entier pair.

12. ■ Trouver tous les applications g de � dans � telles que :

$$g(m+n) = g(m) \times g(n).$$

Vous avez dit récurrence ?

13. ■ Démontrer que les propriétés « 3 divise $10^n - 1$ » et « 3 divise $10^n + 1$ » sont héréditaires, c'est-à-dire que si elles sont vraies pour un entier, elles sont vraies pour le suivant. Que dire de leur vérité pour tout entier ?

14. ■ Considérons le raisonnement suivant :

Des points distincts du plan, en nombre fini, sont toujours alignés.
Démontrons-le par récurrence.
La propriété est vraie pour deux points.
Supposons la propriété vraie pour un entier arbitraire p : p points distincts du plan, quels qu'ils soient, sont toujours alignés.
Considérons alors les p + 1 points $A_1, A_2, ..., A_{p+1}$.
Les p premiers sont alignés sur une droite D et les p derniers sur une droite D'.
Ces deux droites ont en commun $A_2, ..., A_p$. Elles sont donc confondues, ce qui prouve que les p + 1 points sont alignés.

Autre version, moins géométrique, de la même démonstration

Montrer qu'étant donnée une boîte de crayons de couleurs, ils sont tous de la même couleur, en adaptant le raisonnement précédent (qui est faux pour les mêmes raisons)

15. ■ On considère la suite (u_n) définie pour n 1 par :

$$u_n = \frac{n^2 - n + 1}{n^2}$$

1) Quel est le sens de variation de cette suite ?
2) Que pensez-vous du raisonnement suivant :

« Cherchons à démontrer que u_n 1, pour tout n 1.
La propriété est clairement vraie si $n = 1$.
Supposons maintenant qu'elle est vraie pour un entier arbitraire p : alors u_p 1.
Comme la suite est croissante, on peut écrire :

u_{p+1} u_n 1,

ce qui prouve que la propriété est vraie au rang $p + 1$.
On a donc démontré par récurrence que pour tout entier naturel   1, u_n 1. »

16. ■ On considère la suite de Fibonacci (u_n), définie pour n 1 par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1) Calculer les 10 premiers termes de la suite de Fibonacci.
2) a) Démontrer que pour tout entier naturel n 1, on a :

$$u_{n+3} \times u_{n+1} - u_{n+2}^2 = u_{n+1} \times u_{n-1} - u_n^2.$$

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \times u_n - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.
c) En déduire que deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont premiers entre eux.
3) Démontrer que pour tout couple $(n, p) \in \square^{*2}$: $u_{n+p-1} = u_{n-1} \times u_{p-1} + u_n \times u_p$.
4) Montrer que pour tout entier naturel p, on a :

$$\begin{cases} u_{2p} = 2u_p u_{p+1} - u_p^2 \\ u_{2p+1} = u_{p+1}^2 + u_p^2 \end{cases}$$

En déduire un calcul de u_{32} et u_{33}.

Récurrence utile ?

17. ■ Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

a) 6 divise $n^3 + 5n$; b) 7 divise $3^{2n} - 2^n$;

c) $5^{2n} - 1$ est divisible par 24 ; d) $n^3 + 2n$ est divisible par 3.

18. ■ Démontrer que tout produit de p entiers consécutifs est divisible par $p!$.

19. ■ À quoi est égale la somme 1 + 2 + ... + n ?

20. ■ Montrer que la somme des n premiers entiers impairs est un carré.

21. ■ Démontrer par récurrence la relation $0^2 + 1^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Que vaut $0^3 + 1^3 + ... + n^3$? Montrer-le par récurrence.

22. ■Utiliser les développements de $(1 + x)^2$, $(1 + x)^3$, $(1 + x)^4$, $(1 + x)^5$, en y remplaçant successivement x par 1, 2, …, n pour calculer les sommes :

1) $S_1 = \sum_{k=1}^{n} k$, 2) $S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$,

3) $S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3$, 4) $S_4 = \sum_{k=1}^{n} k^4$.

23. ■ Démontrer que pour tout n entier naturel, $n^5 - n$ est divisible par 10.

24. ■ **Descente infinie**

Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel en utilisant une descente infinie.

La descente infinie est le principe selon lequelle il n'existe pas de suite strictement décroissante d'entiers positifs. Ce principe fut mis en évidence et fréquement utilisé en arithmétique par Fermat.

Méthode de la descente expliquée par Fermat lui-même

S'il y avait un triangle rectangle en nombres entiers, qui eut son aire égale à un carré, il y aurait un autre triangle moindre que celui-là qui aurait la même propriété. S'il y en avait un second moindre que le premier qui eut la même propriété, il y en aurait par un pareil raisonnement un troisième moindre que ce second qui aurait la même propriété, et enfin un quatrième, un cinquième etc. à l'infini en descendant. Or est-il qu'étant donné un nombre il n'y en a point infinis en descendant moindres que celui-là, j'entens parler toujours des nombres entiers. D'où on conclut qu'il est donc impossible qu'il y ait aucun triangle rectangle dont l'aire soit carré.

25. ■ Montrer en utilisant une descente infinie que l'équation $x^3 + 2y^3 = 4z^3$ n'a pas de solutions entières non triviales.

26. ■ **Les cocus de Bagdad**

Le calife de Bagdad, irrité par la présence de cocus dans sa ville, fit prendre par son grand vizir l'édit suivant :

> *« Comme je me suis rendu compte qu'il y avait des cocus à Bagdad, je proclame le décret suivant :*
> *Tout habitant de Bagdad qui s'apercevra que sa femme le trompe devra l'égorger la nuit suivant le jour où il s'en sera rendu compte »*

Il y avait 32 cocus dans la ville. Il advint qu'il ne se passa rien pendant 32 jours, et que le trente-troisième matin, quand Bagdad se reveilla, les 32 femmes indignes avaient été égorgées.

Expliquer le raisonnement que se sont faits les cocus, en sachat toutefois que les habitants de Bagdad sont d'excellents logiciens et que chaque homme peut dire avec certitude, si un autre que lui est cocu ou non, mais n'a aucun moyen de statuer sur son sort.

27. ■ La propriété est manifestement vraie pour $n = 0$ $(0 < 1)$, $n = 1$ $(1 < 2)$, $n = 2$ $(2 < 4)$…
Supposons donc la propriété démontrée à un rang arbitraire p.
On a alors, pour cet entier p, $p < 2^p$ (hypothèse de récurrence)
Montrons que la propriété est aussi vraie pour $p + 1$.
D'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$p + 1 < 2^p + 1$$

Or $2^p + 1 \mathbb{C} 2^p + 2^p = 2 \times 2^p = 2^{p+1}$.
Finalement, on a prouvé que $p + 1 < 2^{p+1}$ et la propriété est bien vraie au rang $p + 1$.

28. ■ La propriété est vraie pour $n = 0$ $(0 < 1)$.
Supposons donc la propriété démontrée à un rang arbitraire p.
On a alors, pour cet entier p, $p^2 < 2^p$ (hypothèse de récurrence)
Montrons que la propriété est aussi vraie pour $p + 1$, c'est-à-dire que $(p + 1)^2 \mathbb{C} 2^{p+1}$.
De $p^2 < 2^p$, on tire $2p^2 < 2^{p+1}$; il suffit donc que l'on démontre que $(p + 1)^2 < 2p^2$.
Cette dernière affirmation équivaut à

$$p^2 + 2p + 1 < 2p^2$$
$$p^2 - 2p - 1 > 0$$
$$(p - 1)^2 - 2 > 0$$

$p - 1 > \sqrt{2}$ (car p est un entier naturel)

$$p > 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}414$$

Si p est supérieur ou égal à 3, la propriété est vraie pour $p + 1$.
Il faut donc vérifier ce qui se passe pour

- $n = 1 : 1^2 < 2$; c'est vrai ;
- $n = 2 : 2^2 < 2^2$; c'est faux ;
- $n = 3 : 3^2 < 2^3$; c'est faux ;
- $n = 4 : 4^2 < 2^4$; c'est faux ;
- $n = 5 : 5^2 < 2^5$; c'est vrai…

La propriété est donc vraie à partir de $n = 5$.

29. ■ La propriété est vraie pour $n = 1$. En effet, $\frac{4}{2} = 2 \leq \binom{2}{1} = 2$.
Supposons donc la propriété démontrée à un rang arbitraire p. On a alors, pour cet entier p, $\frac{4^p}{2\sqrt{p}} \leq \binom{2p}{p}$ (hypothèse de récurrence)
Montrons que la propriété est aussi vraie pour $p + 1$, c'est-à-dire montrons que $\frac{4^{p+1}}{2\sqrt{p+1}} \leq \binom{2p+2}{2p}$
Or

$$\binom{2p+2}{p+1} = \frac{(2p+2)!}{(p+1)!^2} = \frac{(2p+2)(2p+1)(2p)!}{(p+1)^2(p!)^2} = \frac{(4p+2)}{(p+1)}\binom{2p}{p}.$$

L'hypothèse de récurrence :

$$\frac{4^p}{2\sqrt{p}} \leq \binom{2p}{p}$$

permet de déduire :

$$\frac{4p+2}{p+1}\frac{4^p}{2\sqrt{p}} \leq \binom{2p+2}{p+1}$$

L'inégalité que l'on cherche à prouver a bien lieu si :

$$\frac{4^{p+1}}{2\sqrt{p+1}} \leq \frac{4p+2}{p+1}\frac{4^p}{2\sqrt{p}}.$$

Étudions donc le signe de la différence :

$$\frac{4p+2}{p+1}\frac{4^p}{2\sqrt{p}}-\frac{4^{p+1}}{2\sqrt{p+1}}=\frac{(4p+2)\times 4^p\times\sqrt{p+1}-(p+1)\sqrt{p}\times 4^{p+1}}{2(p+1)\sqrt{p}\sqrt{p+1}}$$

$$=\frac{4^p\left((4p+2)\sqrt{p+1}-4(p+1)\sqrt{p}\right)}{2(p+1)\sqrt{p}\sqrt{p+1}}$$

$$=\frac{4^p\left((4p+2)^2(p+1)-16(p+1)^2p\right)}{\left(2(p+1)\sqrt{p}\sqrt{p+1}\right)\left((4p+2)\sqrt{p+1}+4(p+1)\sqrt{p}\right)}$$

$$=\frac{4^p(p+1)\left((4p+2)^2-16(p+1)p\right)}{\left(2(p+1)\sqrt{p}\sqrt{p+1}\right)\left((4p+2)\sqrt{p+1}+4(p+1)\sqrt{p}\right)}$$

$$=\frac{4^p(p+1)\left(16p^2+16p+4-16p^2-16p\right)}{\left(2(p+1)\sqrt{p}\sqrt{p+1}\right)\left((4p+2)\sqrt{p+1}+4(p+1)\sqrt{p}\right)}$$

$$=\frac{4^{p+1}(p+1)}{\left(2(p+1)\sqrt{p}\sqrt{p+1}\right)\left((4p+2)\sqrt{p+1}+4(p+1)\sqrt{p}\right)}>0$$

Bref, on a bien prouvé l'inégalité au rang $p + 1$.

30. ■ On appelle $P(n)$ la propriété qui dit que tout entier n 2 est divisible admet au moins un diviseur premier.
La propriété est vraie pour $n = 2$: il suffit de prendre 2 lui-même qui est un nombre premier.
Soit maintenant un entier n arbitraire. On suppose que $P(n)$ est vraie pour tout entier k compris entre 2 et n.
Considérons l'entier qui suit $n + 1$.
Ou bien il est premier, et il est alors divisible par lui-même.
Ou bien il ne l'est pas, et il est alors divisible par un entier k strictement compris entre 1 et $n + 1$, qui d'après l'hypothèse de récurrence admet aussi un diviseur premier p. Par transitivité, $n + 1$ est divisible par p.
La propriété est donc vraie pour $n + 1$.

31. ■ La propriété est vraie pour $n = 0, 1, 2\ldots$
Soit p un entier arbitraire supérieur ou égal à 1 et supposons qu'il existe un carré k^2 compris entre p et $2p$.
On peut donc écrire :

$$p\leq k^2\leq 2p.$$

Que se passe-t-il pour $p + 1$? Plus précisément peut-on trouver un carré compris entre $p + 1$ et $2p + 2$?
Plusieurs cas sont à envisager.
Si $k^2 = p$, alors $(k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1 = p + 2k + 1$.
Il est alors immédiat que $p + 1 < (k + 1)^2$.
Reste à prouver que $(k + 1)^2$ ℂ $2(p + 1)$ soit $p + 2k + 1$ ℂ $2p + 2$ ou encore $2k – 1$ ℂ p soit finalement $2k – 1$ ℂ k^2 ce qui est vrai car $k^2 – 2k + 1 = (k – 1)^2$ 0 quel que soit l'entier naturel k.
Si $k^2 > p$, alors on peut écrire:

$p < p + 1$ ℂ k^2 ℂ $2p < 2(p + 1)$

et l'inégalité est vérifiée avec le même carré pour p et $p + 1$.

32. ■ Notons que la dérivée demandée pourrait être obtenue avec la formule de Leibniz, qui donne la dérivée n^e d'un produit.
Un doute demeure sur le terme constant du premier facteur. En reprenant les premiers résultats, les élèves voient souvent le calcul de proche en proche (0 puis 2, on ajoute 2, puis 6, on ajoute 4, puis 12, on ajoute 6, puis 20, on ajoute 8... ; ils conjecturent donc que la dérivée 6^e sera $(x^2 + 12x + 30)e^x$, puis que la dérivée 7^e sera $(x^2 + 14x + 42)e^x$... sans parvenir à obtenir une expression générale de ce premier terme.
On pourrait étudier la suite correspondant à ce terme constant, définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n$. Il est facile d'exprimer u_n directement en fonction de n. On arrive finalement à :

$$u_n=2(n-1)+2(n-2)+\ldots+2$$

$$=2\times\frac{n(n-1)}{2}=n(n-1)$$

Expression que l'on aurait pu deviner directement non ? On connaît bien les carrés, pourquoi pas donc les $n(n – 1)$, qui sont les doubles des nombres triangulaires ? D'où l'intérêt d'avoir une excellent fréquentation des nombres, et d'être capable de les reconnaître.
Finalement, il reste à prouver par récurrence, on n'a pas le choix, que :

$$f^{(n)}(x)=\left(x^2+2nx+n^2-n\right)e^x$$

ce qui se fait sans aucune difficulté.
L'intérêt de l'exercice réside dans le travail de conjecture fait en amont...

33. ■ Il semble bien que la dérivée n^{e} de $f_n(x)=x^{n-1}\ln x$ soit $\dfrac{(n-1)!}{x}$, pour n entier naturel non nul.
On peut montrer cette propriété par récurrence. Elle est bien sûr vraie, d'après notre recherche, pour n = 1, 2, 3, 4.
On suppose maintenant que la propriété est vraie pour un entier n arbitraire. On sait que la dérivée n^{e} de $f_n(x)=x^{n-1}\ln x$ est $\dfrac{(n-1)!}{x}$.
Calculons maintenant la dérivée $(n+1)^{e}$ de $f_{n+1}(x)=x^n\ln x=x\times x^{n-1}\ln x$ en utilisant la formule de Leibniz :

$$\binom{n+1}{0}(x)^{(0)}\left(x^{n-1}\ln x\right)^{(n+1)}+\binom{n+1}{1}(x)^{(1)}\left(x^{n-1}\ln x\right)^{(n)}=x\times\left(\frac{(n-1)!}{x}\right)'+(n+1)\times 1\frac{(n-1)!}{x}$$
$$=x\times\frac{-(n-1)!}{x^2}'+(n+1)\frac{(n-1)!}{x}$$
$$=\frac{-(n-1)!}{x}'+(n+1)\frac{(n-1)!}{x}$$
$$=\frac{n(n-1)!}{x}=\frac{n!}{x}$$

Ce qui prouve bien le résultat au rang $n+1$. D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel.

34. ■ La propriété est clairement vraie pour n = 0, 1, 2.
Supposons maintenant que la propriété est vraie pour un entier arbitraire n.
On a donc :

$$(1+a)^n\geq 1+na.$$

Montrons qu'elle est vraie pour l'entier qui suit. On peut écrire :

$$(1+a)^{n+1}\geq(1+a)(1+a)^n\geq(1+a)(1+na).$$

Or ce dernier produit vaut $(1+a)(1+na)=1+(n+1)a+na^2$ et il est clair qu'il est supérieur ou égal à $1+(n+1)a$.
La propriété est donc vraie pour l'entier $n+1$. Elle est donc prouvée par récurrence.

Elle est appelée inégalité de Bernoulli, et peut être prouvée directement à partir de la formule du binôme.

35. ■ Il semble que la somme précédente soit égale à $(n+1)!-1$.

Démontrons-le par récurrence.
La propriété est vraie pour n = 1, 2, etc. d'après les écrans précédents.
Supposons que la propriété soit vraie pour un entier arbitraire n.
On a donc $\sum_{i=1}^{n} ii!=(n+1)!-1$.
Par conséquent :

$$\sum_{i=1}^{n+1} ii!=\sum_{i=1}^{n+1} ii!+(n+1)(n+1)!=(n+1)!-1+(n+1)(n+1!)=(n+1)!(n+1+1)-1$$
$$=(n+2)!-1$$

ce qui prouve la propriété au rang n.
La propriété a donc été prouvée par récurrence.

36. ■ Il semble que pour tout entier naturel n $S_n=\sum_{k=0}^{n}(n-k)^2(-1)^k=\dfrac{n(n+1)}{2}\ldots$

ce qu'on va prouver par récurrence.
La propriété est donc vraie pour n = 1, 2, 3, etc. ce que nous venons d'observer à la calculatrice.
On suppose maintenant que la propriété est vraie pour un entier arbitraire.
On suppose donc que

$$\sum_{k=0}^{n}(n-k)^2(-1)^k=n^2-(n-1)^2+(n-2)^2-\ldots+(-1)^{n-1}\times 1^2+(-1)^n\times 0^2=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Montrons qu'elle est encore vraie au rang $n+1$.

$$\sum_{k=0}^{n+1}(n+1-k)^2(-1)^k=(n+1)^2-n^2+(n-1)^2-(n-2)^2+\ldots+(-1)^n\times 1^2+(-1)^{n+1}\times 0^2$$
$$=(n+1)^2-\sum_{k=0}^{n}(n-k)^2(-1)^k=(n+1)^2-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(2(n+1)-n)}{2}$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

La propriété est donc vraie pour l'entier $n+1$.

37. ■ Il semble que cela soit bien le cas. Montrons-le par récurrence, en sachant que la propriété est vraie pour $n = 2, \ldots, 6$ d'après les écrans qui précèdent.
Supposons donc que la propriété soit vraie pour un entier n arbitraire supérieur ou égal à 2. On peut donc écrire $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \frac{2k'+1}{2k}$ où k et k' sont des entiers naturels.
Tentons le passage en force pour u_{n+1}…
On peut écrire :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1} = \frac{2k'+1}{2k} + \frac{1}{n+1} = \frac{(2k'+1)(n+1)+2k}{2k(n+1)} = \frac{2k'n+2k'+n+1+2k}{2k(n+1)}$$
$$= \frac{2(k'n+k'+k)+n+1}{2k(n+1)}$$

Si le dénominateur est certes pair, on ne peut rien dire en général du numérateur… à moins de faire une hypothèses sur la parité de n. Avançons en ce sens.
Si n est pair, le numérateur est alors impair, le dénominateur est pair et la propriété est bien vérifiée pour $n + 1$ dans ce cas.
Si n est impair, on ne peut rien conclure ainsi. Posons $n = 2p + 1$ et examinons le calcul de plus près.
Première poinit : que vaut dans ce cas u_{n+1} ?

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1} = u_{2p+2} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p+2}$$
$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p+2}\right) + 1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2p+1}$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}\right) + 1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2p+1}$$

Deuxième point : on pourrait appliquer la récurrence à , $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}$, ce qui impose de supposer que la propriété n'est pas seulement vraie pour l'entier n mais pour **tous les entiers** depuis 2 jusqu'à n (récurrence dite forte). On peut alors écrire :

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} = \frac{2l'+1}{2l}$$

Troisième point : on peut écrire $1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2p+1} = \frac{m'}{2m+1}$, m et m' entiers naturels, avec un dénominateur impair, comme produit de tous les entiers de 1 jusqu'à $2p + 1$.
Bilan :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2l'+1}{2l} + \frac{m'}{2m+1} = \frac{(2l'+1)(2m+1)+4lm'}{2\times 2l\times(2m+1)} = \frac{4ml'+2l'+2m+1+4lm'}{2\times 2l\times(2m+1)}$$
$$= \frac{2(2ml'+l'+m+1+2lm')+1}{2\times 2l(2m+1)}$$

Et la propriété est bien vraie au rang $n + 1$.

Pour tout entier naturel n 2, on a prouvé par récurrence que u_n peut s'écrire comme le quotient d'un entier impair par un entier pair.
Remarquons que cela exclut que u_n soit un entier naturel !

38. ■ En faisant $m = n = 0$, il vient $g(0) = g(0)^2$ soit $g(0)^2 - g(0) = 0$ et $g(0)(g(0)-1) = 0$.
Deux cas à examiner…
Tout d'abord, $g(0) = 0$. À ce moment là, on en déduit $g(m+0) = g(m)\times g(0) = 0$ et la fonction g est la fonction nulle.
Sinon, $g(0) = 1$.
Posons $g(1) = a$, avec $a \in$ �.
Alors $g(2) = g(1+1) = g(1)g(1) = a^2$, $g(3) = g(2+1) = g(2)g(1) = a^2\times a = a^3$, et on voit bien de proche en proche que pour tout entier naturel n, $g(n) = a^n$.
Il faut alors le démontrer par récurrence… c'est immédiat.

Vous avez dit récurrence ?
39. ■ En effet, si la propriété est vraie pour un entier arbitraire p, on peut écrire que 3 divise $10^p - 1$. Il existe donc un entier k tel que $10^p - 1 = 3k$.
Par suite, $10^p = 1 + 3k$ et $10^{p+1} = 10 + 30k$.
Donc $10^{p+1} - 1 = 9 + 30k = 3(3 + 10k)$ est bien divisible par 3.
La démonstration est analogue dans l'autre cas.
Si 3 divise $10^p + 1$, il existe k tel que $10^p + 1 = 3k$; donc :

$$10^{p+1} = 10(3k - 1) = 30k - 10.$$

Finalement, $10^{p+1} + 1 = 30k - 9 = 3(10k - 3)$ est bien aussi divisible par 3…

La première propriété est vraie pour $n = 0$ ou $n = 1$: comme elle est héréditaire, elle est vraie pour tout entier naturel.

La seconde n'est pas vraie pour $n = 0$ ou $n = 1$….
À y regarder de près, elle n'est vraie pour aucun entier. En effet, 10 est congru à 1 modulo 3 donc $10^n + 1$ est congru à 2 modulo 3 : ce n'est donc jamais un multiple de 3.
Cela peut se voir aussi avec la formule du binôme, en écrivant :

$$10^n + 1 = (3 \times 3 + 1)^n + 1$$

Les premiers termes du développement donneront des multiples de 3, sauf le dernier terme 1^n, qui ajouté au 1 final donnera 2.

40. ■ Le passage de 2 à 3 ne peut pas se faire (d'ailleurs, on sait bien que trois points ne sont pas forcément sur une droite).
Si on considère trois points A_1, A_2 et A_3, les deux premiers sont bien situés sur une droite, ainsi que les deux derniers. Mais ces deux droites n'ont en commun qu'un seul point, qui ne détermine pas une droite.
C'est le même problème avec les crayons de couleurs.

41. ■ 1) Regardons d'abord ce qui se passe avec les premières valeurs.

Calculons donc $u_{n+1} - u_n$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{(n+1)^2 - (n+1) + 1}{(n+1)^2} - \frac{n^2 - n + 1}{n^2} \\
&= \frac{n^2\left((n+1)^2 - (n+1) + 1\right) - (n+1)^2\left(n^2 - n + 1\right)}{n^2(n+1)^2} \\
&= \frac{n^2 - n^2(n+1) - (n+1)^2 + n(n+1)^2}{n^2(n+1)^2} \\
&= \frac{-n^3 - n^2 - 2n - 1 + n^3 + 2n^2 + n}{n^2(n+1)^2} \\
&= \frac{n^2 - n - 1}{n^2(n+1)^2} > 0
\end{aligned}$$

dès que n 2...

La suite est donc bien croissante pour n supérieur ou égal à 2.
2) Le raisonnement proposé, malgré ses apparences de rigueur, est complètement faux, comme le montre les écrans qui précèdent.
Comme la première partie du raisonnement par récurrence est clairement vraie, c'est donc la deuxième partie qui est fausse.
Le problème, c'est que la suite n'est croissante qu'à partir de $n = 2$: de u_1 1, on ne peut donc pas déduire par un argument de croissance u_2 1.
L'implication n'est vraie qu'à partir de $n = 2$. D'où le problème dans le raisonnement par récurrence.

42. ■ 1) Le calcul peut être fait sans problème à la main :
$u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 2$, $u_4 = 3$, $u_5 = 5$, $u_6 = 8$, $u_7 = 13$, $u_8 = 21$, $u_9 = 34$.
2) a) La récurrence est-elle vraiment utile ici ?
Montrons que l'égalité directement, en utilisant plusieurs fois la définition de la suite de Fibonacci :

$$\begin{aligned}
u_{n+3} \times u_{n+1} - u_{n+2}^2 &= \left(u_{n+2} + u_{n+1}\right)u_{n+1} - \left(u_{n+1} + u_n\right)^2 \\
&= u_{n+2}u_{n+1} + u_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 - u_n^2 - 2u_nu_{n+1} \\
&= u_{n+2}u_{n+1} - 2u_nu_{n+1} - u_n^2 \\
&= u_{n+1}\left(u_{n+2} - 2u_n\right) - u_n^2 \\
&= u_{n+1}\left(u_{n+2} - u_n - u_n\right) - u_n^2 \\
&= u_{n+1}\left(u_{n+1} - u_n\right) - u_n^2 \\
&= u_{n+1} \times u_{n-1} - u_n^2
\end{aligned}$$

b) Cette propriété se démontre par récurrence.
Elle est vraie pour $n = 0$: $u_2 \times u_0 - u_1^2 = (-1)^1$, ou pour $n = 1$: $u_3 \times u_1 - u_2^2 = (-1)^2$.
On suppose que la propriété est vraie jusqu'à un entier arbitraire n. On a donc :

$$u_{n+2} \times u_n - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}.$$

Montrons qu'elle est vraie pour l'entier qui suit, $n + 1$, soit :

$$u_{n+3} \times u_{n+1} - u_{n+2}^2 = (-1)^{n+2} \qquad (?)$$

Or d'après le résultat précédent, on sait que :

$$u_{n+3}\times u_{n+1}-u_{n+2}^2=u_{n+1}u_{n-1}-u_n^2=(-1)^n=(-1)^{n+2}$$

ce qu'il fallait prouver...

c) C'est l'application immédiate du théorème de Bézout. En effet on a :

$$u_{n+2}\times u_n-u_{n+1}^2=(-1)^{n+1}$$

soit $p\times u_n-q\times u_{n+1}=(-1)^{n+1}$ avec $p=u_{n+2}$ entier et $q=u_{n+1}$ entier.

Cette relation de Bézout prouve que les entiers u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

3) n étant fixé, démontrons la relation par récurrence sur l'entier p.

L'égalité est vraie pour $p = 1$ car elle s'écrit

$u_n=u_{n-1}\times u_0+u_n\times u_1=u_{n-1}\times 0+u_n\times 1$.

Supposons donc la propriété vérifiée jusqu'à un entier arbitraire p. On a donc :

$$u_{n+p-1}=u_{n-1}\times u_{p-1}+u_n\times u_p.$$

Montrons la propriété pour l'entier $p + 1$. On a :

$$\begin{aligned}u_{n+p}&=u_{n+p-1}+u_{n+p-2}=\left(u_{n-1}\times u_{p-1}+u_n\times u_p\right)+\left(u_{n-1}\times u_{p-2}+u_n\times u_{p-1}\right)\\&=u_{n-1}\left(u_{p-1}+u_{p-2}\right)+u_n\left(u_p+u_{p-1}\right)=u_{n-1}\times u_p+u_n\times u_{p+1}\end{aligned}$$

et c'est bien ce qu'il fallait prouver...

4) Nous allons vérifier ces formules par récurrence.

Elles sont toutes les deux vraies pour $p = 0$ et $p = 1$.

En effet

$$\begin{cases}u_0=2u_0u_1-u_0^2 \text{ car } 0=2\times0\times1-0^2\\ u_1=u_1^2+u_0^2 \text{ car } 1=1^2+0^2\end{cases} \quad\text{et}\quad \begin{cases}u_2=2u_1u_2-u_1^2 \text{ car } 1=2\times1\times1-1^2\\ u_3=u_2^2+u_1^2 \text{ car } 2=1^2+1^2\end{cases}$$

Supposons la propriété démontrée jusqu'à un entier arbitraire p. On a donc :

$$\begin{cases}u_{2p}=2u_pu_{p+1}-u_p^2\\ u_{2p+1}=u_{p+1}^2+u_p^2\end{cases}$$

Calculons pour commencer u_{2p+2}, dont vous voulons montrer que c'est égal à $2u_{p+1}u_{p+2}-u_{p+1}^2$

$$\begin{aligned}u_{2p+2}&=u_{2p}+u_{2p+1}=2u_pu_{p+1}-u_p^2+u_{p+1}^2+u_p^2=2u_pu_{p+1}+u_{p+1}^2\\&=\left(u_{p+1}+u_p\right)^2-u_p^2=u_{p+2}^2-u_p^2=u_{p+2}^2-\left(u_{p+2}-u_{p+1}\right)^2\\&=u_{p+2}^2-\left(u_{p+2}-u_{p+1}\right)^2=2u_{p+1}u_{p+2}-u_{p+1}^2\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour ce qui concerne F_{2p+3}, on a :

$$\begin{aligned}u_{2p+3}&=u_{2p+2}+u_{2p+1}=2u_{p+1}u_{p+2}-u_{p+1}^2+u_{p+1}^2+u_p^2\\&=2u_{p+1}u_{p+2}+u_p^2=2u_{p+1}u_{p+2}+\left(u_{p+2}-u_{p+1}\right)^2\\&=u_{p+2}^2+u_{p+1}^2\end{aligned}$$

On a bien démontré la propriété pour l'entier qui suit $p + 1$.

On sait que $u_8 = 21$.

Donc $\begin{cases}u_{16}=2u_8u_9-u_8^2=2\times21\times34-21^2=987\\ u_{17}=u_9^2+u_8^2=34^2+21^2=1597\end{cases}$.

On poursuit

$$\begin{cases}u_{32}=2\times987\times1597-987^2=2178309\\ u_{33}=987^2+1597^2=3524578\end{cases}$$

Récurrence utile ?

43. ■ a) La propriété est vraie pour $n = 0$ ou 1.

Supposons la propriété démontrée pour un entier arbitraire p : alors 6 divise $p^3 + 5p$; il existe un entier relatif k tel que $p^3 + 5p = 6k$.

Considérons $(p + 1)^3 + 5(p + 1)$. Il vaut :

$$(p+1)^3+5(p+1)=p^3+3p^2+3p+1+5p+5=6k+6+3p^2+3p$$

Or $3p^2 + 3p = 3p(p + 1)$ est un multiple de 3 ; c'est clairement aussi un multiple de 2, car entre p et $p + 1$, l'un est obligatoirement pair : c'est donc bien un multiple de 6.

La propriété est donc bien vraie aussi au rang $p + 1$.

Mais la récurrence est-elle si indispensable ? Ne masque-t-elle pas la raison profonde du résultat ?

En retirant $6n$, qui est un multiple de 6, dire que $n^3 + 5n$ est divisible par 6 équivaut à dire que $n^3 + 5n - 6n = n^3 - n$ est divisible par 6.

Or $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n + 1)(n - 1)$: ce dernier nombre est divisible par 2 (l'un des trois nombres est pair) et par 3 (l'un des trois nombres est un multiple de 3), donc par 6 car 2 et 3 sont premiers entre eux. (Même principe pour le d).

b) La récurrence se fait… Il suffit de l'écrire, mais est-elle bien nécessaire ?

En effet, on a une identité remarquable qui dit que :

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

En particulier, il est alors immédiat de remarquer que $3^{2n} - 2^n = (3^2)^n - 2^n$ est divisible par $3^2 - 2 = 7$…

c) De même, d'après l'identité remarquable qui précède, $5^{2n} - 1$ est divisible par $5^2 - 1$.

d) Même raisonnement que le a)… il suffit de retirer $3n$ pour se ramener à $n^3 + 2n$.

44. ■ Un raisonnement par récurrence ne se prête pas bien à cet exercice. Il est plus simple de remarquer que le produit de p entiers consécutifs peut s'écrire ainsi :

$$n(n-1)\ldots(n-p+1) = A_n^p = p!C_n^p$$

d'où le résultat se déduit immédiatement...

45. ■ Faire une démonstration par récurrence suppose que l'on ait au départ trouvé la valeur de cette somme. Elle n'est pas donnée ici – elle est par ailleurs bien connue. Rappelons une façon simple de l'obtenir, en écrivant deux fois la somme, appelons-la S, une fois dans l'ordre croissant, une autre fois dans l'ordre décroissant.

$$S = 1 + 2 + 3 + ... + (n-2) + (n-1) + n$$
$$S = n + (n-1) + (n-2) + ... + 3 + 2 + 1$$

Additionnons ces égalités membre à membre et regardons ce qui se passe verticalement :

$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + ... + (n+1) + (n+1) + (n+1)$$
$$= n(n+1)$$

d'où la valeur bien connue de $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

46. ■ Après examen de quelques cas, on peut chercher à démontrer que :

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n+1) = (n+1)^2$$

que l'on démontre sans peine par récurrence.

Sinon, on peut chercher à faire un raisonnement direct.

On sait que :

$$S = 1 + 2 + ... + (2n+1) + (2n+2) = \frac{(2n+2)(2n+3)}{2} = (n+1)(2n+3)$$

Par ailleurs :

$$T = 2 + 4 + 6 + ... + 2n + (2n+2) = 2(1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1))$$
$$= 2\frac{(n+1)(n+2)}{2} = (n+1)(n+2)$$

Si bien que la somme cherchée vaut :

$$S - T = (n+1)(2n+3) - (n+1)(n+2) = (n+1)^2$$

Une visualisation géométrique est là aussi très éclairante.

47. ■ La propriété est vraie pour le premier indice $n = 0$.

Supposons la propriété vraie pour un entier p arbitraire et montrons qu'elle est vraie pour l'entier suivant $p + 1$. Alors :

$$0^2 + 1^2 + ... + p^2 + (p+1)^2 = \left(0^2 + 1^2 + ... + p^2\right) + (p+1)^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + (p+1)^2$$
$$= \frac{p(p+1)(2p+1) + 6(p+1)^2}{6} = \frac{(p+1)\left(p(2p+1) + 6(p+1)\right)}{6}$$
$$= \frac{(p+1)\left(2p^2 + 7p + 6\right)}{6} = \frac{(p+1)(p+2)\left(2(p+1)+1\right)}{6}$$

Ceci prouve que la propriété est bien vraie au rang $p + 1$. Remarquons que ce raisonnement ne nous dit pas *comment* obtenir cette expression...

On montre de même que $0^3 + 1^3 + ... + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ par récurrence… dès qu'on connaît la formule. Au fait comment peut-on l'obtenir, cette formule ?

48. ■ Une piste sur le comment d'une formule, comme celle de l'exercice précédent.

1) $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$ pour tout x réel.

Écrivons cette égalité pour $x = 1, 2, ..., (n-1), n$.

$$x = 1 \quad 2^2 = 1 + 2\times 1 + 1^2$$
$$x = 2 \quad 3^2 = 1 + 2\times 2 + 2^2$$
$$x = 3 \quad 4^2 = 1 + 2\times 3 + 3^2$$

…	…	…	…	…	…	…	…
$x = n - 1$	n^2	=	1	+	$2(n-1)$	+	$(n-1)^2$
$x = n$	$(n+1)^2$	=	1	+	$2n$	+	n^2

En additionnant ces n égalités, et en supprimant les termes identiques de part et d'autre du signe =, on arrive à :

$$(n+1)^2 = n + 2S_1 + 1$$

d'où l'on tire $2S_1 = (n+1)^2 - (n+1) = (n+1)(n+1-1) = n(n+1)$ et la valeur habituelle de S_1.

Par le même procédé, on obtient $S_2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $S_3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = S_1^{\,2}$.

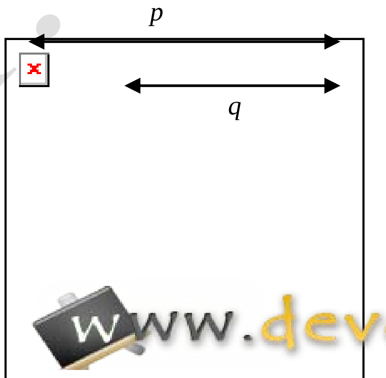
49. ■ Il est clair que :

$$\begin{aligned}n^5 - n &= n(n^4-1) = n(n^2-1)(n^2+1) = n(n-1)(n+1)(n^2+1)\\ &= n(n-1)(n+1)\left((n^2-4)+5\right) = n(n-1)(n+1)(n^2-4) + 5n(n-1)(n+1)\\ &= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + 5n(n-1)(n+1)\end{aligned}$$

Ce nombre est divisible par 5 comme somme de deux termes divisibles par 5, le premier parce que c'est le produit de 5 termes consécutifs, dont un forcément est un multiple de 5, et le second de façon immédiate.
C'est aussi un nombre divisible par 2, comme somme de deux termes divisibles par 2, pour des raisons analogues.
$n^5 - n$ est donc toujours un multiple de 10… Est-il besoin de faire une récurrence ?

Descente infinie

50. ■ Supposons que l'on puisse écrire $\sqrt{2}$ sous la forme d'un quotient de deux entiers soit $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$. On en déduit $2 = \dfrac{p^2}{q^2}$ soit $p^2 = 2q^2$.
Interprétons géométriquement cette égalité.
Considérons un grand carré dont la longueur du côté soit p (carré blanc) ; son aire est deux fois l'aire d'un autre carré dont le côté est également un entier q.



On prend donc deux carrés de côté q, les bleus, et on les dispose dans le grand carré, sur les coins opposés, comme indiqué sur la figure.
Disposés ainsi, ils doivent évidemment se recouvrir (sinon la somme de leurs aires serait inférieure à l'aire du grand carré).
En se recouvrant, ils forment une intersection qui est représentée dans mon dessin comme un carré bleu foncé au centre.
Ce dernier carré doit donc être égal à l'aire non recouverte du grand carré, c'est à dire les somme des aires des deux petits carrés blancs en haut à gauche et en bas à droite (en comptant la somme des aires de deux carrés bleus, on compte deux fois la partie centrale, qui correspond donc à l'aire des deux carrés blancs).
Côté du carré central : $p - 2(p - q) = 2q - p$, nombre entier...
Côté du carré blanc : $p - q$, nombre entier...
On a encore $(2q - p)^2 = 2(p - q)^2$, soit $\dfrac{2q-p}{p-q} = \sqrt{2}$.
On a donc encore écrit $\sqrt{2}$ comme quotient de deux entiers, avec des entiers strictement inférieurs à p et q. On peut répéter indéfiniment ce procédé...
Géométriquement, on retrouve donc la même situation: un carré de côté entier, le carré central, égal à la somme de deux carrés entiers plus petits, les carrés blancs. C'est évidemment impossible, car le processus peut continuer sans fin. Donc l'hypothès de départ est fausse.
Sinon, on peut encore plus simplement envisager la démonstration suivante. Supposons qu'il existe deux entiers p et q tels que $p^2 = 2q^2$.
p^2 est pair, donc p.
p s'écrit donc sous la forme $2p_1$ et $4p_1^2 = 2q^2$ soit $2p_1^2 = q^2$ donc q^2 est pair, ainsi que q.
q s'écrit donc sous la forme $2q_1$. On arrive donc à $p_1 = 2q_1$, c'est-à-dire la situation de départ, avec deux entiers strictement plus petit... En réitérant le processus, on construit une suite strictement décroissante d'entiers, ce qui est impossible.

51. ■ Soit donc (x, y, z) un triplet correspondant à une solution non triviale de cette équation. Non triviale signifie qu'au moins un des trois nombres x, y ou z non nul ; comme deux des nombres, ou un seul, ne peuvent pas être nuls, nous pouvons donc supposer que $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.
Comme $x^3+2y^3=4z^3$, on en tire $x^3=4z^3-2y^3$: ceci prouve que x^3, et donc x, est pair, ou qu'il existe un entier naturel x' tel que $x = 2x'$.
Rien n'empêche de poursuivre en remplaçant x par cette valeur. Ce qui donne :

$$8x'^3+2y^3=4z^3 \text{ soit } 4x'^3+y^3=2z^3.$$

De la même façon, on déduit que y^3, donc y, est pair.
En remplaçant y par $2y'$, on arrive cette fois à :

$$4x'^3+8y'^3=2z^3 \text{ soit } 2x'^3+4y'^3=z^3.$$

Enfin de cette dernière égalité, on déduit que z^3, et z, sont pairs. En remplaçant z par $2z$, on arrive à :

$$2x'^3+4y'^3=8z^3, \text{ soit } x'^3+2y'^3=4z'^3.$$

Bilan : le triplet (x', y', z') est solution de la même équation. Il est clair que $x' < x$, $y' < y$ et $z' < z$.
En renouvelant cette construction, on tombe sur une absurdité car il est impossible de construire une suite strictement décroissante d'entiers naturels.
L'équation possède donc comme seule solution le triplet trivial (0,0,0).

52. ■ **Les cocus de Bagdad**
On suppose évidemment que chaque mari est parfaitement au courant de la situation des autres maris, mais pas de la sienne… Par ailleurs, l'édit doit affirmer explicitement l'existence de cocus dans la ville.
Soit H_n la propriété

> « S'il y a n cocus à Bagdad, leurs femmes seront égorgées la n^e nuit après parution de l'édit ».

Montrons cette propriété par récurrence.

Elle est vraie pour $n = 1$. Après publication de l'édit, le seul cocu de la ville apprend qu'il l'est, puisqu'il sait que les autres ne le sont pas ! Il égorge sa femme le premier soir…

Supposons la propriété vraie pour un entier arbitraire n et montrons qu'elle est vraie pour l'entier qui suit $n + 1$.
Supposons donc qu'il y a $n + 1$ cocus à Bagdad et montrons que la boucherie aura bien lieu la $(n + 1)^e$ nuit.
Considérons d'abord un de ces cocus : il connaît l'existence des n autres, mais ne sait pas que lui-même en est un. Il peut tenir ce raisonnement :

> « Si je ne suis pas cocu, il n'y a donc que n cocus à Bagdad… qui vont égorger leur femme le n^e soir » (d'après l'hypothèse de récurrence)…

Il attend ce soir-là, pendant lequel il ne se passe rien… C'est donc qu'il est cocu… et il peut donc affuter son couteau pour le soir suivant.
Bilan : les malheureuses $n + 1$ femmes de cocus seront bien égorgées ce soir-là !
Et les autres femmes ? Un mari non cocu connaît l'existence de $n + 1$ autres cocus… et peut-être lui, ce qui porterait le nombre de cocu à $n + 2$.
Il attend donc au moins le lendemain du $(n + 1)^e$ soir avant de décider quoi que ce soit. Là, il constate le massacre des femmes, et en déduit qu'il n'est pas cocu (s'il l'avait été, il y aurait eu $n + 2$ cocus dans la ville et il ne se serait rien passé le $n + 1$ soir !).