Devoir surveillé de mathématiques
Terminales S

L'usage d'une calculatrice est autorisé.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

Partie A
On considère l'équation $(E) : 11x - 26y = 1$, où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

1. Résoudre l'équation (E).
2. En déduire le couple d'entiers relatifs $(u\,;v)$ solution de (E) tel que $0 \leqslant u \leqslant 25$.

Partie B
On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On « code » tout nombre entier x compris entre 0 et 25 de la façon suivante :
– on calcule $11x + 8$
– on calcule le reste de la division euclidienne de $11x + 8$ par 26, que l'on appelle y.
x est alors « codé » par y.

Ainsi, par exemple, la lettre L est assimilée au nombre 11 ; $11 \times 11 + 8 = 129$ or $129 \equiv 25$(modulo 26) ; 25 est le reste de la division euclidienne de 129 par 26. Au nombre 25 correspond la lettre Z.
La lettre L est donc codée par la lettre Z.

1. Coder la lettre W.
2. Le but de cette question est de déterminer la fonction de décodage.
   a. Montrer que pour tous nombres entiers relatifs x et j, on a :
   $$11x \equiv j \text{ (modulo 26)} \quad \text{équivaut à} \quad x \equiv 19j \text{ (modulo 26)}.$$
   b. En déduire un procédé de décodage.
   c. Décoder la lettre W.

Exercice 2

n étant un entier relatif quelconque, on considère a et b définis par $a = n^3 - 2n + 5$ et $b = n + 1$.

1. Montrer que $PGCD(a;b) = PGCD(b;6)$.
2. Pour quelles valeurs de n a-t-on $PGCD(a;b) = 3$?
3. Déterminer n pour que le nombre $\dfrac{a}{b}$ soit un entier relatif.

www.devoirat.net 2016

Epreuve de Spécialité 16/12/2009

I A 1) $11x - 26y = 1$ (E)

Recherchons une solution particulière de (E) à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

$26 = 11\times 2 + 4$ d'où $1 = 4 - 3$

$11 = 4\times 2 + 3$ $\iff 1 = 4 - (11 - 4\times 2)$

$4 = 3 + 1$ $\iff 1 = 4\times 3 - 11$

$\iff 1 = (26 - 11\times 2)\times 3 - 11$

$\iff 1 = 26\times 3 - 7\times 11$

Donc $-7\times 11 + 3\times 26 = 1 \Rightarrow (-7\,;-3)$ solution particulière de (E)

d'autre part (E) $\iff 11x - 26y = 1$

Donc par différence, $11(x+7) - 26(y+3) = 0$

$\iff 11(x+7) = 26(y+3)$ (*)

11 et $26 = 13\times 2$ sont premiers entre eux

(*) montre que $\left.\begin{array}{l} 11 \mid 26(y+3) \\ 11 \wedge 26 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ d'après le théorème de Gauss $11 \mid y+3$

Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tq $y = 11k - 3$

En reportant cette valeur de y dans (*) on a $11(x+7) = 26\times 11k$

$\Rightarrow x = 26k - 7$

Vérifions que $x = 26k - 7\,;\ y = 11k - 3\,;\ k\in\mathbb{Z}$ est bien solution de (E)

$11x - 26y = 11\times 26k - 11\times 7 - 26\times 11k + 26\times 3$

$= -11\times 7 + 26\times 3 = 1$

d'où $S = \{(26k - 7\,;\ 11k - 3)\,;\ k\in\mathbb{Z}\}$

2) on veut $0 \leqslant 26k - 7 \leqslant 25$

$\iff 7 \leqslant 26k \leqslant 32 \iff \frac{7}{26} \leqslant k \leqslant \frac{32}{26}$.

et $\frac{7}{26} = 0,\dots$; $\frac{32}{26} = 1,\dots$ d'où la seule valeur entière de k est $k = 1$

le couple (u, v) cherché est $(19, 8)$

Donc $11\times 19 - 26\times 8 = 1$

www.devoirat.net 2016

(B) ① W est assimilée à 22

et $11\times 22+8 \equiv 11(-4)+8 \quad (26)$

$\equiv -36 \quad (26)$

$\equiv 16 \quad (26)$

et 16 est associé à Q donc W est codé par Q

②ⓐ $11x \equiv j \ (26) \Rightarrow 11\times 19\, x \equiv 19 j \ (26)$ (Compatibilité de la congruence avec le produit

$\Rightarrow x \equiv 19 j (26)$ car d'après (A) $11\times 19 = 1+26\times 8 \equiv 1 \ (26)$

Réciproquement: $x \equiv 19 j \ (26) \Rightarrow 11x \equiv 11\times 19\, j \ (26)$ (Compatibilité avec le pr

$\Rightarrow 11x \equiv j (26)$.

Finalement on a bien $11x \equiv j (26) \Longleftrightarrow x \equiv 19$

ⓑ Supposons qu'une lettre codée soit associée à y. Il faut résoudre $11x+8 \equiv y (26) \Longleftrightarrow 11x \equiv y-8$ (

$\Longleftrightarrow x \equiv 19(y-8)$

d'où la valeur de x e

lettre associée

ⓑ Soit une lettre codée par W (associée à 22)

c'est que $11x+8 \equiv 22 \quad (26)$

$\Longleftrightarrow 11x \equiv 14 \quad (26)$

$\Longleftrightarrow x \equiv 19\times 14 \ (26)$

$\equiv (-7)\times(-12) \equiv 84 \equiv 3\times 26+6 \quad (26)$

$\equiv 6 \quad (26)$ et 6 associé à G.

d'où W se décode par G.

(II) ① faisons la division de a par b :

$$\begin{array}{l|l} n^3 - 2n + 5 & n+1 \\ \underline{n^3 + n^2} & \overline{n^2 - n - 1} \\ -n^2 - 2n + 5 & \\ \underline{-n^2 - n} & \\ \quad -n + 5 & \\ \quad \underline{-n - 1} & \\ \quad\quad 6 & \end{array}$$

d'où $a = b(n^2-n-1)+6$

donc d'après le th fondamental du PGCD

on a $PGCD(a,b) = PGCD(b,6)$

③ $\dfrac{a}{b} = n^2-n-1+\dfrac{6}{b}$

donc $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow \dfrac{6}{b} \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow$ b diviseur de 6 d'où $b \in \{-6;-3;-2;-1;1;2;$

donc $n \in \{-7;-4;-3;-2;0;$

② $PGCD(a;b)=3 \Longleftrightarrow PGCD(b;6)=3$

$\Longleftrightarrow$ b multiple de 3 sans être multiple de 2

$\Longleftrightarrow b=3k$ avec k non multiple de 2 (c'est-à-dire impair)

$\Longleftrightarrow b=3(2k'+1)$

$\Longleftrightarrow b = 6k'+3 \Longleftrightarrow b \equiv 3 \ (6) \Longleftrightarrow n \equiv 2 \ (6)$

Conclusion : $PGCD(a,b)=3 \Longleftrightarrow b \equiv 3 \ (6)$

www.devoirat.net 2016