Devoir de Mathématiques N^o 1

Exercice 1 :

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{3n+1} - 2$ est divisible par 7.

Exercice 2 :

Déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ pour lesquelles $n + 1$ divise $n^2 + 3n + 4$.

Exercice 3 :

Déterminer les entiers naturels non nuls dont la division euclidienne par 43 donne un reste égal au carré du quotient.

DS1 spécialité maths

23 sept 2011

I Soit P_n la ppté $7 \mid 2^{3n+1} - 2$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ P_n est vraie.

Etape 1 : pour $n = 0$; $2^{3n+1} - 2 = 2 - 2 = 0$

et $7 \mid 0 \implies P_0$ est vraie.

Etape 2 : Soit $q \in \mathbb{N}$, supposons P_q vraie et montrons P_{q+1} vraie.

P_q vraie donc $7 \mid 2^{3q+1} - 2$

$\implies$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2^{3q+1} - 2 = 7k$. $(*)$

et $2^{3(q+1)+1} - 2 = 2^{3q+1} \times 2^3 - 2$

mais d'après $(*)$ $2^{3q+1} = 7k + 2$

d'où $2^{3(q+1)+1} - 2 = (7k+2) \times 2^3 - 2$

$$= 2^3 \times 7k + 2^4 - 2$$

$$= 2^3 \times 7k + 14$$

$$= 7(2^3 \times k + 2)$$

donc $7 \mid 2^{3(q+1)+1}$ d'où P_{q+1} vraie.

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}$, 7 divise $2^{3n+1} - 2$

II

$$\begin{array}{r|l} n^2 + 3n + 4 & n+1 \\ \underline{n^2 + n} & \overline{n+2} \\ 2n + 4 & \\ \underline{2n + 2} & \\ 2 & \end{array}$$

On déduit donc que $n^2 + 3n + 4 = (n+1)(n+2) + 2$

donc

$$n+1 \mid n^2+3n+4 \iff n+1 \mid (n+1)(n+2)+2$$

$$\iff n+1 \mid 2 \text{ par combinaison linéaire}$$

$$\iff n+1 \in D_2 \text{ avec } D_2=\{-2,-1,1,2\}$$

Les entiers solution du problème sont $\{-3\,;-2\,;0\,;\,1\}$

III Le problème posé équivaut à déterminer n satisfaisant

$$\begin{cases} n = 43q + r \\ r = q^2 \\ 0 \leq r < 43 \end{cases} \iff \begin{cases} n = 43q + q^2 \\ 0 \leq q^2 < 43 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} n = 43q + q^2 \\ q \in \{0, 1, 2, \dots 6\} \end{cases}$$

finalement $n = 0$ (à exclure car on cherche $n \in \mathbb{N}^*$)

$n = 44$ (pour $q=1$)

$n = 90$ ou $n = 138$; $n = 188$; $n = 240$; $n = 294$

on a $S = \{44, 90, 138, 188\,; 240\,; 294\}$