Exercice 1 : (3 points)

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \int_0^1 2^x 3^{x+1}\, dx$

2. $J = \int_0^\pi \cos^2 x\, dx$

Exercice 2 : (4 points)

On pose pour tout entier naturel n non nul :

$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} x^2 (\ln x)^n\, dx$$

1. Montrer que (I_n) est décroissante.
2. Montrer que (I_n) est convergente. On note ℓ la limite de (I_n).
3. En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n :

$$3I_{n+1} + (n+1)I_n = \mathrm{e}^3$$

4. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

Exercice 3 : (7 points)

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}.$$

1. Étudier le signe de sa fonction dérivée f', sa limite éventuelle en $+\infty$, et dresser le tableau de ses variations.
2. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par son terme général $u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   a) Justifier que, si $n \leqslant x \leqslant n+1$, alors $f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$.
   b) Montrer, sans chercher à calculer u_n, que, pour tout entier naturel n,

   $$f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n).$$

   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
3. Soit F la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

   $$F(x) = [\ln(x+3)]^2\,.$$

   a) Justifier la dérivabilité sur $[0\,;\,+\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x, le nombre $F'(x)$.
   b) On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$.
   Calculer I_n.
4. On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$.
   Calculer S_n. La suite (S_n) est-elle convergente ?

Exercice 4 : (6 points)

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & u_n - \ln\left(u_n^2+1\right) \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

Partie A

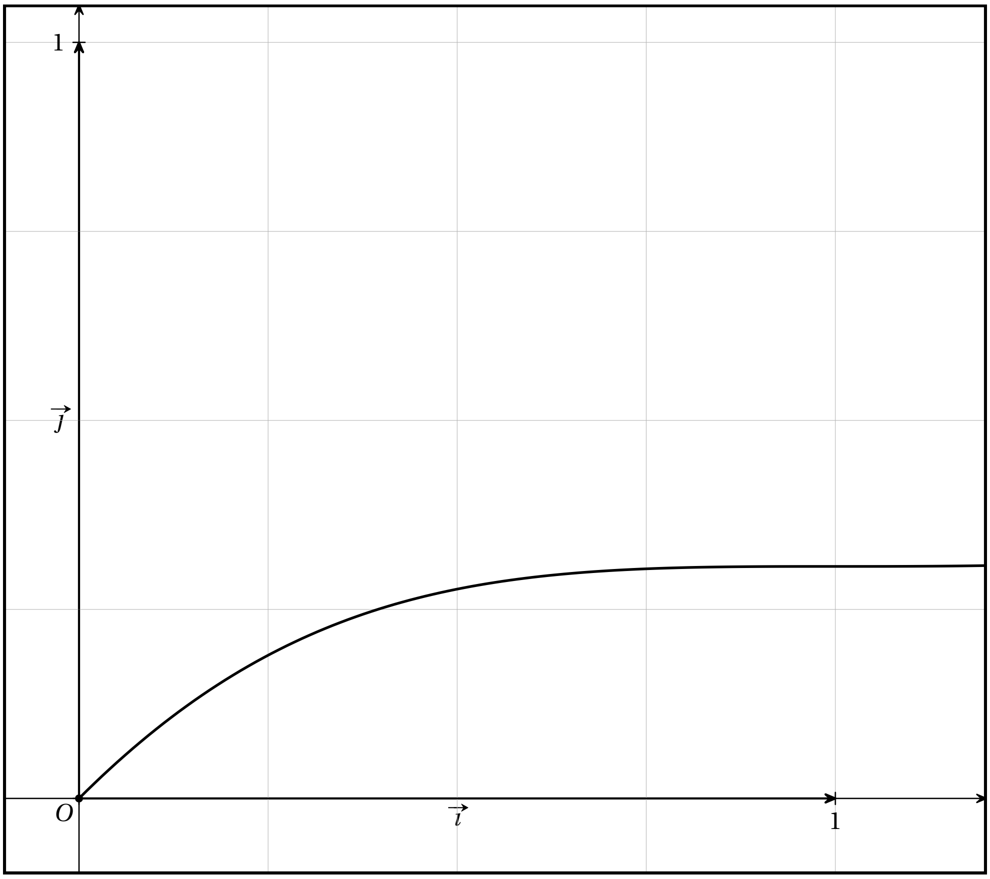
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right).$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
   En déduire que si $x \in [0\ ;\ 1]$ alors $f(x) \in [0\ ;\ 1]$.

Partie B

1. La courbe représentative de f est tracée sur le document donné en annexe. Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n \in [0\ ;\ 1]$.
3. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
4. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.



31 mars 2011

DS 7

I

$I = \int_0^1 2^x 3^{x+1} dx = \int_0^1 6^x \times 3\, dx$

$= 3\int_0^1 e^{x\ln 6} dx = \frac{3}{\ln 6} \int_0^1 \underbrace{\ln 6\, e^{x\ln 6}}_{u'} dx = \frac{3}{\ln 6} \left[e^{x \ln 6}\right]_0^1$

$= \frac{3}{\ln 6}\left(e^{\ln 6} - 1\right)$

$= \frac{15}{\ln 6}$.

$J = \int_0^{\pi} \cos^2 x\, dx$ et $\cos x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= 2\cos^2 x - 1 \implies \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$

$= \int_0^{\pi} \frac{\cos 2x + 1}{2} dx$

$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi} 2\cos(2x) dx + \int_0^{\pi} \frac{dx}{2}$ (par linéarité de l'intégrale)

$= \frac{1}{4}\left[\sin(2x)\right]_0^{\pi} + \left[\frac{x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$

II ① Pour $x \in [1; e]$ on a $1 \leq x \leq e$

donc $0 \leq \ln x \leq 1$ (car $\ln \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$

$\xrightarrow{\forall n \in \mathbb{N}}$ $(\ln x)^{n+1} \leq (\ln x)^n$ $(\times (\ln x)^n$ avec $(\ln x)^n >$

$\implies x^2(\ln x)^{n+1} \leq x^2 (\ln x)^n$

et les bornes étant dans l'ordre $(1 \leq e)$ on a par intégration de l'inégali

$\int_1^e x^2(\ln x)^{n+1} dx \leq \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$ c'est-à-dire $I_{n+1} \leq I_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

c'est donc que la suite (I_n) est décroissante.

② $\forall x \in [1, e]$; $\ln x > 0$ donc $(\ln x)^n > 0$ et par produit $x^2(\ln$

On déduit donc par th de positivité que $\forall n \in \mathbb{N}$ $I_n \geq 0$.

donc (I_n) décroissante et minorée par 0 $\longrightarrow$ (I_n) convergente vers $l \in \mathbb{R}$.

③ $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} = \int_1^e x^2 (\ln x)^{n+1} dx.$$

Soit u, v, u', v' continues sur $[1 ; e]$ avec

$u(x) = (\ln x)^{n+1}$; $u'(x) = (n+1)(\ln x)^n \times \frac{1}{x}$

$v'(x) = x^2$; $v(x) = \frac{x^3}{3}$

Alors par intégration par parties, $I_{n+1} = \left[(\ln x)^{n+1} \times \frac{x^3}{3}\right]_1^e - \int_1^e (n+1)\frac{x^2}{3}(\ln x)^n dx$

donc $I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}(n+1) I_n$

d'où finalement $3 I_{n+1} + (n+1) I_n = e^3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

④ On déduit alors que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $I_n = \frac{e^3}{n+1} - \frac{3 I_{n+1}}{n+1}$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^3}{n+1} = 0$; $\lim\limits_{n \to +\infty} I_{n+1} = l$; $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty$

donc par quotient $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{I_{n+1}}{n+1} = 0$

d'où par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

⑤ Question Joker : Quelle est la limite de $(n I_n)$?

on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $n I_n = e^3 - I_n - 3 I_{n+1}$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n I_n = e^3$.

III ① $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}$; $D = \mathbb{R}_+$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ d'après les règles de dérivation et

$\forall x \geq 0$, $f'(x) = \frac{1}{(x+3)^2}\left((x+3) \times \frac{1}{x+3} - \ln(x+3)\right)$

$$= \frac{1}{(x+3)^2}\left(1 - \ln(x+3)\right)$$

Donc $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x+3)$.

d'où $f'(x) > 0 \iff 1 - \ln(x+3) > 0$

$\iff \ln(x+3) < 1$

$\Longleftrightarrow \quad x+3 < e$ car exp $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow \quad x < e-3$. et $e-3<0$ donc sur $\mathbb{R}_+$ on a toujours $f'(x)<$

On déduit alors le tableau de variation de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$\frac{\ln 3}{3}$ $\searrow$	0

$$\left.\begin{array}{l} X = x+3 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x+3 = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

② ⓐ f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x \in [n, n+1]$ on a $n \leq x \leq n+1 \Longrightarrow f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$

donc $\forall x \in [n,n+1]$, $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$

ⓑ On en déduit par intégration de l'inégalité sur $[n,n+1]$ avec les bornes dans l'ordre

$$\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(n)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$$

ⓒ $\forall n\in\mathbb{N}$, d'après ⓑ on a $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$

et $f(n+2) \leq u_{n+1} \leq f(n+1)$

donc $u_{n+1} \leq f(n+1) \leq u_n$. $\forall n\in\mathbb{N}$. $(*)$

donc (u_n) est décroissante.

juste mais inutile

d'après ①, $f(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$, donc d'après le th de positivité avec les bornes dans l'ordre ($n < n+1$) on a

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq 0.$$

donc (u_n) décroissante et minorée par 0 donc par th (u_n) converge

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1) = 0$ donc d'après $(*)$ avec le th des gendarmes

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

③ ⓐ $F(x) = (\ln(x+3))^2$

$x \longmapsto x+3$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $[3,+\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$

$X \longmapsto \ln X$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

$y \longmapsto y^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

donc par composée $x \longmapsto F(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

et $\forall x \geqslant 0$, $F'(x) = 2\ln(x+3) \times \dfrac{1}{x+3}$

ⓑ $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,dx = \int_0^n \frac{\ln(x+3)}{x+3}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^n F'(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[F(x)\right]_0^n$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\ln(x+3))^2\right]_0^n$$

$$= \frac{1}{2}\left((\ln(n+3))^2 - (\ln(3))^2\right)$$

④ $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$

$$= \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x)\,dx$$

$$= \int_0^n f(x)\,dx \quad \text{(par relation de Chasles)}$$

$$= I_n.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (n+3) = +\infty$
$\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$ } donc par composée $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+3) = +\infty$

et donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln(n+3))^2 = +\infty$

d'où par somme et quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

donc (S_n) diverge vers $+\infty$.

IV A

1) $f(x) = x \iff -\ln(x^2+1) = 0$

$\iff x^2+1 = 1$

$\iff x^2 = 0 \iff x = 0.$

$f(x) = x$ a pour unique solution $x = 0$.

2) f est dérivable sur $[0;1]$ d'après les règles de dérivation

et $\forall x \in [0;1]$ $f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{x^2+1}$

$$= \frac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

et $\forall x \in [0,1]$; $x^2+1 > 0$; $(x-1)^2 \geqslant 0$ donc par quotient $f'(x) \geqslant 0$ sur $[0,1]$

Donc f est strictement croissante sur $[0,1]$ d'où le tableau de variation de f

x	0	1
$f(x)$	0 $\nearrow$	$1-\ln 2$

donc $\forall x \in [0,1]$, $0 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ car f strictement croissante sur $[0,$

$\Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1 - \ln 2$

$\Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow f(x) \in [0,1]$

B

1) $u_0 = 1$; $u_1 = f(u_0)$; $u_2 = f(u_1)$ d'où la construct° de u_0, u_1, u_2, u_3

2) Soit P_n la propriété $u_n \in [0,1]$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

Etape 1 : pour $n = 0$; $u_0 = 1 \Rightarrow P_0$ vraie.

Etape 2 : Soit $q \in \mathbb{N}$, supposons P_q vraie et montrons P_{q+1} vraie.

P_q vraie $\Rightarrow u_q \in [0,1] \Rightarrow f(u_q) \in [0;1] \Rightarrow u_{q+1} \in [0,1] \Rightarrow P_{q+1}$ vraie
(d'après A2)

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$

$= -\ln(u_n^2+1)$

et $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n \in [0,1] \Rightarrow u_n^2 + 1 \geqslant 1 \Rightarrow \ln(u_n^2+1) \geqslant 0$

$\Rightarrow -\ln(u_n^2+1) \leq 0$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc [illegible] décroissante

4) (u_n) décroissante et minorée par 0 donc (u_n) converge vers $\ell \in [0,1]$.

$\left.\begin{array}{l} u_{n+1} = f(u_n) \ \forall n \in \mathbb{N} \\ (u_n) \text{ converge vers } \ell \in [0,1] \\ f \text{ continue sur } [0,1] \end{array}\right\}$ donc d'après le th du point fixe $\ell = f(\ell)$

donc d'après (A1) $\ell = 0$.