Exercice 1

Le but de cet exercice est d'étudier une même configuration géométrique à l'aide de deux méthodes différentes.

I-A l'aide des nombres complexes, sur un cas particulier

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est 1 cm.

1. On considère les points A et B d'affixes respectives 10 et 5i.
   a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s qui transforme O en A et B en O.
   b) Déterminer les éléments caractéristiques de s. On note Ω son centre.
   c) Déterminer le point $s\circ s(\mathrm{B})$; en déduire la position du point Ω par rapport aux sommets du triangle ABO.
2. On note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x-2y=0$, puis A′ et B′ les points d'affixes respectives 8+4i et 2+i.
   a) Démontrer que les points A′ et B′ sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et de B sur la droite $\mathcal{D}$.
   b) Vérifier que $s(\mathrm{B}') = \mathrm{A}'$.
   c) En déduire que le point Ω appartient au cercle de diamètre $\left[\mathrm{A}'\mathrm{B}'\right]$.

II - A l'aide des propriétés géométriques des similitudes

OAB est un triangle rectangle en O tel que $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

1. On note encore s est la similitude directè telle que $s(\mathrm{O})=\mathrm{A}$ et $s(\mathrm{B})=\mathrm{O}$. Soit Ω son centre.
   a) Justifier le fait que l'angle de s est égal à $\dfrac{\pi}{2}$.
   b) Démontrer que Ω appartient au cercle de diamètre [OA]. (On admet de même que Ω appartient aussi au cercle de diamètre [OB].)
   En déduire que Ω est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB.
2. On désigne par $\mathcal{D}$ une droite passant par O, distincte des droites (OA) et (OB). On note A′ et B′ les projetés othogonaux respectifs des points A et B sur la droite $\mathcal{D}$.
   a) Déterminer les images des droites (BB′) et $\mathcal{D}$ par la similitude s.
   b) Déterminer le point $s(\mathrm{B}')$.
   c) En déduire que le point Ω appartient au cercle de diamètre [A′B′]

DS 5 – Spécialité

I ① $A(10)$; $B(5i)$

ⓐ s similitude directe telle que $O \longmapsto A$, $B \longmapsto O$

s a pour écriture complexe $z' = az + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$

$$\left.\begin{matrix} O \mapsto A \\ B \mapsto O \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 10 = b \\ 0 = a \times 5i + b \end{matrix}\right. \iff \left\{\begin{matrix} b = 10 \\ a = -\dfrac{10}{5i} = 2i \end{matrix}\right.$$

donc s a pour écriture $z' = 2iz + 10$.

ⓑ on a $a = 2i$ donc le rapport de s est $k = |2i| = 2$ et l'angle est $\theta = \frac{\pi}{2}$

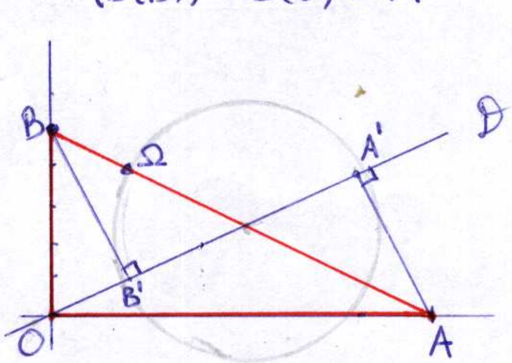
de plus $\Omega(\omega)$ centre s est le point invariant

d'où $\omega = 2i\omega + 10 \iff \omega(1-2i) = 10$

$$\iff \omega = \frac{10}{1-2i} = \frac{10(1+2i)}{5} = 2(1+2i).$$

donc $\Omega(2+4i)$

ⓒ $s(s(B)) = s(O) = A$



$s \circ s$ est une similitude directe de rapport 2^2 et d'angle π de centre Ω.

$\Rightarrow s \circ s$ homothétie de rapport -4 et de centre

et $s \circ s(B) = A$ d'où $\vec{\Omega A} = -4\vec{\Omega B}$

donc $5\vec{\Omega A} = -4\vec{AB}$

$\iff \vec{A\Omega} = \frac{4}{5}\vec{AB}$ d'où la construct° de $\Omega \in$ [

de plus $\begin{matrix} O \xmapsto{s} A \\ \Omega \xmapsto{s} \Omega \end{matrix}$ donc $(\vec{\Omega O}, \vec{\Omega A}) = +\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

et $\Omega \in [AB]$ donc Ω est le pied de la hauteur du triangle

OAB issue de O.

② $\mathcal{D} : x - 2y = 0$; $A'(8;4)$ $B'(2;1)$

les coordonnées de A' et B' satisfont l'éq de $\mathcal{D} \Rightarrow A', B' \in \mathcal{D}$.

$\vec{AA'}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{BB'}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{D} : y = \frac{x}{2}$ admet pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u} = -2+2 = 0$; $\overrightarrow{BB'} \cdot \vec{u} = 0$

d'où $(AA') \perp \mathcal{D}$ et $(BB') \perp \mathcal{D}$

et comme de plus $A', B' \in \mathcal{D}$ on déduit A' et B' projetés orthogonaux de A et B sur $\mathcal{D}$.

(b) $B'(2+i)$ donc B' a pour image le point d'affixe $z = 2i z_{B'} + 10$

$$= 2i(2+i) + 10$$
$$= 8 + 4i = z_{A'}$$

d'où $B' \longmapsto A'$

(c) On a $\Omega \longmapsto \Omega$ et s similitude d'angle $+\frac{\pi}{2}$.
$B' \longmapsto A'$

d'où $(\overrightarrow{\Omega B'}, \overrightarrow{\Omega A'}) = +\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ $\Rightarrow$ $\Omega A'B'$ rectangle en Ω

$\Rightarrow$ Ω point du cercle de diamètre [A'B']

(II) **(1) (a)** s similitude directe et $O \longmapsto A$
$B \longmapsto O$

d'où s a pour angle $\theta = (\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})\ (2\pi)$

$$= +\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\quad (2\pi)$$

donc s a pour angle $\frac{\pi}{2}$.

(b) $\left.\begin{array}{l} O \xrightarrow{s} A \\ \Omega \xrightarrow{s} \Omega \end{array}\right\}$ donc $(\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega A}) = +\frac{\pi}{2}\ (2\pi) \Rightarrow \Omega OA$ rectangle en Ω

d'où Ω point du cercle de diamètre [OA].

on montre de même que Ω point du cercle de diamètre [OB] et $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega O}) = \frac{\pi}{2}$

on a $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}) = (\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega O}) + (\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega A})\ (2\pi)$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \quad (2\pi)$$

d'où Ω, B, A alignés

de plus $(\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega A}) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ donc Ω pied de la hauteur du triangle ABO issue de O.

② ⓐ s similitude d'angle $+\frac{\pi}{2}$; $B \xmapsto{s} O$ donc l'image de (BB') est une droite perpendiculaire à (BB') passant par O

donc (BB') a pour image $\mathcal{D}$.

s similitude d'angle $+\frac{\pi}{2}$; $s(O) = A$. ; $O \in \mathcal{D}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{D}$ a pour image une droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant $s(O) = A$

donc $\mathcal{D}$ a pour image (AA')

(conservation de l'intersect°.)

ⓑ $\{B'\} = \mathcal{D} \cap (BB')$; $s(\mathcal{D}) = (AA')$; $s((BB')) = \mathcal{D}$ $\Rightarrow$ $s(B') \in (AA') \cap \mathcal{D}$

$\Rightarrow s(B') \in \{A'\} \Rightarrow s(B') = A'$

ⓒ $B' \xmapsto{s} A'$; $\Omega \xmapsto{s} \Omega$; s d'angle $+\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $(\overrightarrow{\Omega B'}, \overrightarrow{\Omega A'}) = +\frac{\pi}{2} \ (2\pi) \Rightarrow \Omega B'A'$ rectangle en

donc Ω point du cercle de diamètre $[A'B']$