Exercice 1 : (4 points)

Calculer le reste de $A = 9668622^{14548}$ dans la division par 11.

Exercice 2 : (2 points)

Trouver x et y tels que $\overline{x2y}^{6} = \overline{3x2}^{5}$.

Exercice 3 : (4 points)

1. Déterminer suivant les valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ le reste da la division de n^2 par 8.
2. Déduire de la question précédente les solutions dans $\mathbb{Z}$ des équations suivantes :

   (a)
   $$(n+4)^2 - 4 \equiv 0 \quad (8)$$

   (b)
   $$(3n^2 + 2n + 1)^2 - 19 = 0$$

Exercice 4 : (10 points)

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.
   En déduire que $2^{3n+1} - 2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2} - 4$ est un multiple de 7.
2. Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.
3. Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier : $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.
   (a) Si $p = 3n$, quel est le reste de la division de A_p par 7 ?
   (b) Démontrer que si $p = 3n + 1$ alors A_p est divisible par 7.
   (c) Étudier le cas où $p = 3n + 2$.
4. On considère les nombres entiers a et b écrits dans le système binaire :
   $a = \overline{1001001000} \quad b = \overline{1000100010000}$.
   Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme A_p.
   Sont-ils divisibles par 7 ?

TS

Devoir de spécialité N°2

19 Nov. 2008

(I) $9668622 = 11 \times 878965 + 7$

Donc par compatibilité de la congruence avec la puissance, on a $9668622^{14548} \equiv 7^{14548} \ (11)$

$7^2 \equiv 49 \equiv 5 \ (11)$
$7^3 \equiv 2 \ (11)$
$7^4 \equiv 14 \equiv 3 \ (11)$
$7^5 \equiv -1 \ (11) \implies 7^{10} \equiv 1 \ (11)$ (Nous verrons que c'est un résultat immédiat avec le petit thm de Fermat)

finalement $A = 7^{14548} \equiv 7^{1454 \times 10 + 8} \ (11)$

$$\equiv \left(7^{10}\right)^{1454} \times 7^8 \ (11)$$

$$\equiv 7^8 \equiv (7^4)^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \ (11)$$

Le reste de la division de A par 11 est 9

(II) $\overline{x2y}^{6} = \overline{3x2}^{5} \iff 36x + 12 + y = 3 \times 25 + 5x + 2$ et $0 \leq y < 6$, $0 \leq x < 5$
$\iff 31x + y = 65$

avec $x = 2$ et $y = 3$ ça manche.

On a alors $\overline{223}^{6} = \overline{322}^{5}$

(III) ① si $n \equiv a \ (8)$ alors par compatibilité de la congruence avec le produit on a $n^2 \equiv a^2 \ (8)$

d'où le tableau de congruences.

$n \equiv \ (8)$	0	1	2	3	4	5	6	7
$n^2 \equiv \ (8)$	0	1	4	1	0	1	4	1

② ⓐ $(n+4)^2 - 4 \equiv 0 \ (8) \iff (n+4)^2 \equiv 4 \ (8)$
$\iff n + 4 \equiv 2 \ (8)$ ou $n + 4 \equiv 6 \ (8)$ d'après ①
$\iff n \equiv -2 \ (8)$ ou $n \equiv 2 \ (8)$

Les solutions de l'équations sont les entiers relatifs de la forme
$n = 8k + 6$ ou $n = 8k + 2$ avec $k \in \mathbb{Z}$; c'est à dire $n = 4k + 2$, $k \in \mathbb{Z}$

ⓑ L'équation équivaut à $(3n^2 + 2n + 1)^2 = 19$

d'où $(3n^2 + 2n + 1)^2 \equiv 3 \ (8)$ et ceci est impossible d'après ① $\rightarrow S = \emptyset$.

IV ① $\forall n \in \mathbb{N}$; $2^{3n}-1 = (2^3)^n - 1 \equiv 8^n - 1 \equiv 1-1 \equiv 0\ (7)$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ 7 divise $2^{3n}-1$

• $2^{3n+1}-2 = 2(2^{3n}-1)$ et $2^{3n}-1$ multiple de 7 $\Rightarrow 2^{3n+1}-2$ multiple de 7

• $2^{3n+2}-4 = 4(2^{3n}-1)$ donc de même $7 \mid 2^{3n+2}-4$.

② $2 \equiv 2\ (7)$
$2^2 \equiv 4\ (7)$
$2^3 \equiv 1\ (7)$

donc si $n = 3k+r$ on a alors $2^n \equiv (2^3)^k \times 2^r \equiv 2^r\ (7)$

d'où si $n = 3k$ le reste de la division par 7 de 2^n est $2^0 = 1$

si $n = 3k+1$ ---------------------------------- 2

si $n = 3k+2$ ---------------------------------- $2^2 = 4$

③ⓐ si $p = 3n$ alors

$$A_p = 2^{3n} + 2^{6n} + 2^{9n}$$
$$\equiv 1+1+1\ (7) \text{ (d'après ②)}$$
$$\equiv 3\ (7)$$

donc le reste de la division de A_p par 7 est 3.

ⓑ si $p = 3n+1$ alors $A_p = 2^{3n+1} + 2^{6n+2} + 2^{9n+3}$

$$= 2^{3n+1} + 2^{3(2n)+2} + 2^{3(3n+1)}$$
$$\equiv 2+4+1\ (7) \quad \text{(d'après ②)}$$
$$\equiv 0\ (7)$$

d'où 7 divise A_p

ⓒ si $p = 3n+2$, $A_p = 2^{3n+2} + 2^{6n+4} + 2^{9n+6}$

$$= 2^{3n+2} + 2^{3(2n+1)+1} + 2^{3(3n+2)}$$
$$\equiv 4+2+1\ (7) \text{ (d'après ②)}$$
$$\equiv 0\ (7)$$

d'où 7 divise A_p.

④ $a = 2^3 + 2^6 + 2^9 = A_3$

d'après ③a 7 ne divise pas A_3.

$b = 2^4 + 2^8 + 2^{12} = A_4$

et $4 = 3+1$ est de la forme $3n+1 \Rightarrow 7 \mid A_4$ d'après ③b

Remarque : La question 2b pouvait se déduire directement de la ①