Le barème est approximatif et la calculatrice est autorisée.

Exercice 1 : (3 points)

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$:

$$\left\{\begin{array}{ccc} xy & = & 3375 \\ PGCD(x,y) & = & 15 \end{array}\right.$$

Exercice 2 : (8 points)

1. Utiliser l'algorithme d'Euclide pour trouver une solution particulière dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $23x-17y=1$
2. En déduire une solution particulière dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $23x-17y=6$
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $23x-17y=6$
4. Trouver les entiers **naturels** A inférieurs à 1000 tels que dans la division euclidienne de A par 23, le reste soit 2, et dans celle de A par17 le reste soit 8.

Exercice 3 : (7 points)

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que PGCD $(n; n+1) = 1$.

   (b) Soit a et b deux entiers naturels. Montrer que

   $$\text{PGCD } (a;b) = 1 \Longrightarrow \text{PGCD } (a^2;b) = 1$$

2. Soit n un entier naturel non nul.
   On considère les nombres a et b tels que :

   $$a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1 \qquad \text{et} \qquad b = 2n^2 + n.$$

   (a) Montrer que $2n+1$ divise a et b.

   (b) Un élève affirme que le PGCD de a et b est $2n+1$.
   Son affirmation est-elle vraie ou fausse ? (*La réponse sera justifiée.*)

Exercice 4 : (2 points)

Dans cette question, toute trace de recherche,même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$

$$x^2 - 5y^2 = 3$$

TS Devoir de spécialité N°3 17 décembre 2008

(I) $\begin{cases} xy = 3375 \\ x \wedge y = 15 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 15x' ; y = 15y' \\ 225x'y' = 3375 \\ x' \wedge y' = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 15x' ; y = 15y' \\ x'y' = 15 \\ x' \wedge y' = 1 \end{cases}$

Les solutions de $\begin{cases} x'y' = 15 \\ x' \wedge y' = 1 \end{cases}$ sont $x' = 1 ; y' = 15$ ou $x' = 3 ; y' = 5$ ou $x' = 5 ; y' = 3$ ou $x' = 15 ; y' = 1$

Donc les solutions du système de départ sont

$S = \{(15,225) ; (45 ; 75) ; (75,45) ; (225,15)\}$.

(II) ① $23 = 17 + 6$ d'où $1 = 6 - 5$
$17 = 6\times 2 + 5$ $\quad = 6 - (17 - 6\times 2)$
$6 = 5 + 1$ $\quad = 6\times 3 - 17$
$\quad = (23-17)\times 3 - 17 = 23\times 3 - 17\times 4$

Donc $(3 ; 4)$ est une solution particulière de $23x - 17y = 1$

② on déduit alors par produit par 6 $23\times 18 - 17\times 24 = 6$ (*)
Donc $(18, 24)$ solution particulière de $23x - 17y = 6$. (E)

③ Par différence entre (E) et (*) on a $23(x-18) - 17(y-24) = 0$

d'où $\left.\begin{array}{l} 23(x-18) = 17(y-24) \\ 23 \wedge 17 = 1 \text{ (car 23 et 17 premiers)} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Gauss}} 23 \mid y - 24$

Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tq $y - 24 = 23k \implies \underline{y = 23k + 24}$.

on a alors $23(x-18) = 17\times 23k \implies \underline{x = 17k + 18}$

Vérifions que le couple $(x ; y)$ est solution :

$23x - 17y = 23(17k+18) - 17(23k+24)$
$= 23\times 18 - 17\times 24 = 6$ donc on a

$S = \{(17k+18 ; 23k+24) ; k \in \mathbb{Z}\}$

④ $\begin{cases} A \in \mathbb{N} ; A \leq 1000 \\ A = 23q + 2 \quad (L_2) \\ A = 17q' + 8 \quad (L_3) \end{cases} \iff \begin{cases} A \in \mathbb{N} ; A \leq 1000 \\ A = 23q + 2 \\ 23q - 17q' = 6 \quad (L_2)-(L_3) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} A \in \mathbb{N} , A \leq 1000 \\ A = 23q + 2 \\ q = 17k + 18 ; q' = 23k + 24 , k \in \mathbb{N} \end{cases}$ d'après ③

Finalement $A = 23(17k+18)+2 \quad k \in \mathbb{Z}$

et $0 \leq A \leq 1000$

$\Leftrightarrow 0 \leq 391k + 416 \leq 1000$

$\Leftrightarrow -416 \leq 391k \leq 584$

$\Leftrightarrow -391-25 \leq 391k \leq 391+193$

$\Leftrightarrow -1-\frac{25}{391} \leq k \leq 1+\frac{193}{391}$ d'où $k \in \{-1;0;1\}$

Donc les valeurs possibles de A sont 25 ; 416 ; 807

III ① a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n+1-n = 1$ donc d'après le thm de Bezout $n \wedge n+1 = 1$

b) $a \wedge b = 1 \Rightarrow$ il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tq $au+bv=1$

donc en élevant au carré $a^2u^2+b^2v^2+2abuv=1$

$\Leftrightarrow a^2u^2+b(bv^2+2auv)=1$

$\Rightarrow \underline{a^2 \wedge b = 1}$

② a)
$$\begin{array}{r|l} 2n^3+5n^2+4n+1 & 2n+1 \\ \underline{2n^3+n^2} & n^2+(2n+1) \\ 4n^2+4n+1 & \\ \underline{(2n+1)^2} & \\ 0 & \end{array}$$

d'où $2n^3+5n^2+4n+1 = (2n+1)(n^2+2n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

d'où $2n+1$ divise a

d'autre part $2n^2+n = n(2n+1) \Rightarrow 2n+1$ divise b.

b) $PGCD(a,b) = PGCD((2n+1)(n^2+2n+1); n(2n+1))$

$= (2n+1)\,PGCD(n^2+2n+1; n)$

$= (2n+1)\,PGCD((n+1)^2; n)$

et d'après ① a) $PGCD(n,n+1)=1$ et donc d'après ① b) $PGCD((n+1)^2; n)=1$

d'où $PGCD(a,b)=1$. L'élève a donc raison.

IV $x^2-5y^2=3$ (E)

si (x,y) est solut° alors $x^2 \equiv 3 \ (5)$.

Tableau de congruence modulo 5 :

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	4	1

donc $\forall x \in \mathbb{N}$, $x^2 \not\equiv 3 (5) \Rightarrow$ (E) n'a pas de solution.