<u>Correction de l'épreuve de Mathématiques (Session principale 2016)</u>

<u>Proposée par : Mr KHEMIRI Fawzi</u>

## Exercice 1

**1)** **a –** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

**b –** Comme $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points *A*, *B* et *C* ne sont pas alignés et par suite ils déterminent un plan $P=(ABC)$.

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan *P* donc $P:-x+z+d=0$ .
$A(1,0,2)\in P$ donc $d=-1$ et enfin $P:-x+z-1=0$ équivaut à $P:x-z+1=0$.

**2)** **a –** $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-3/2\\0\\3/2\end{pmatrix}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ donc $\Delta=(IJ)$ et comme $J\in P$ $\left(x_J-z_J+1=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1=0\right)$ alors $\Delta$ coupe le plan *P* en *J*.

**b–** La distance $IJ=\frac{3}{2}\sqrt{2}$ .

**3)** **a –** $(S):x^2+y^2+z^2-2x+2y+2z-2=0 \Leftrightarrow (S):(x-1)^2-1+(y+1)^2-1+(z+1)^2-1-2=0 \Leftrightarrow$ $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=\sqrt{5}^2$ donc $(S)$ est la sphère de centre $I(1,-1,-1)$ et de rayon $R=\sqrt{5}$ .

**b–** $d(I,(P))=\dfrac{3}{\sqrt{2}}<R=\sqrt{5}$ donc $(S)\cap(P)$ est le cercle $(C)$ de centre *J* le projeté orthogonal de *I* sur $(P)$ ( car la droite (*IJ*) est perpendiculaire à (*P*)en *J* ) et de rayon $r=\sqrt{\sqrt{5}^2-\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ .

**4)** **a –** $x_N{}^2+y_N{}^2+z_N{}^2-2x_N+2y_N+2z_N-2=$
$(1+\cos\theta)^2+(-1+\sin\theta)^2+(-3)^2-2(1+\cos\theta)+2(-1+\sin\theta)-6-2=$
$1+2\cos\theta+\cos^2\theta+1-2\sin\theta+\sin^2\theta+9-2-2\cos\theta-2+2\sin\theta-8=0$ donc $N\in(S)$.

**b –** $x_N-z_N+1=1+\cos\theta+3+1=5+\cos\theta\neq0\ \ \forall\theta\in\mathbb{R}$ car $5+\cos\theta\geq4,\forall\theta\in\mathbb{R}$ alors $N\notin(P)$.

**c –** $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}\cos\theta\\-1+\sin\theta\\-5\end{pmatrix}$ $\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AN}=-1.\cos\theta+1.(-5)=-5-\cos\theta$.

**d–** Le volume du tétraèdre *ABCN* est $\vartheta=\dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AN}\right|=\dfrac{1}{6}\left|-5-\cos\theta\right|=\dfrac{1}{6}(5+\cos\theta)$.

On pose $f(\theta)=\dfrac{1}{6}(5+\cos\theta)$. *f* est dérivable sur $[0,2\pi[$

et $f'(\theta)=\dfrac{1}{6}(-\sin\theta)=-\dfrac{1}{6}\sin\theta$ . Le volume $\vartheta$ du tétraèdre *ABCN* est donc minimal pour $\theta=\pi$ et il vaut $\frac{2}{3}$.

| $\theta$ | $0$ | | $\pi$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(\theta)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(\theta)$ | $1$ | $\searrow$ | $2/3$ | $\nearrow$ | $1$ |

## Exercice 2

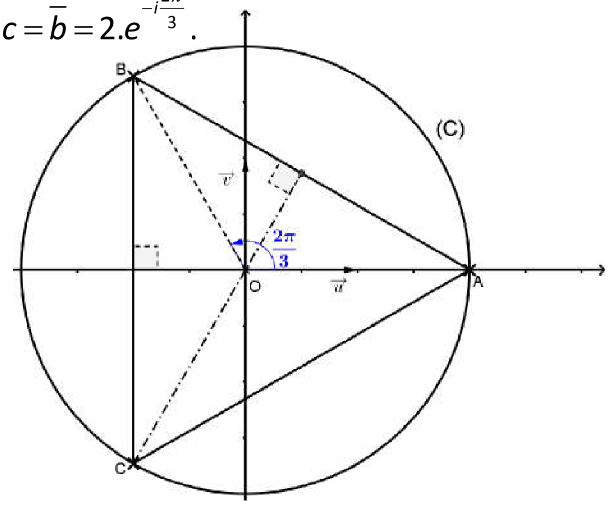
**1)** **a –** $\left(3-i\sqrt{3}\right)^2=9-6\sqrt{3}i-3=6-6\sqrt{3}i$

**b –** $\Delta=\left(1+i\sqrt{3}\right)^2+8-8i\sqrt{3}=6-6\sqrt{3}i=\left(3-i\sqrt{3}\right)^2$.

$z' = \dfrac{1+i\sqrt{3}-3+i\sqrt{3}}{2} = -1+i\sqrt{3}$ **et** $z'' = \dfrac{1+i\sqrt{3}+3-i\sqrt{3}}{2} = 2$**.** Ainsi $S_{\mathbb{C}} = \left\{-1+i\sqrt{3};2\right\}$.

**2)** **a –** Voir figure ci-contre.

**b –** $b = 2\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) = 2.e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et donc $c = \overline{b} = 2.e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.




**c –** $|b| = |c| = 2 \Leftrightarrow OB = OC = 2$ donc les points $B$ et $C$ appartiennent au cercle ($\mathscr{C}$).

**d –** Voir figure ci-contre.

**3)** **a –** $\dfrac{c}{b-2} = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}} = \dfrac{i\cancel{\left(-\sqrt{3}+i\right)}}{\sqrt{3}\cancel{\left(-\sqrt{3}+i\right)}} = \dfrac{i\sqrt{3}}{3}$.

**b –** $\dfrac{z_{\overrightarrow{OC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}$ est imaginaire pur donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OC}$ et $\dfrac{z_{\overrightarrow{OA}}}{z_{\overrightarrow{BC}}}$ est imaginaire pur donc $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{OA}$ donc les droites $(CO)$ et $(AO)$ portent les hauteurs issues respectivement de $A$ et $C$. On en déduit que O est l'orthocentre du triangle $ABC$.

**Exercice 3**

**1)** **a –** $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

**b –** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{x}.e^{1-x} = 1\times(+\infty) = +\infty$ ce qui peut être interprété graphiquement par une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de $-\infty$.

**c –** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e.\left(x.e^{-x}+e^{-x}\right) = \lim\limits_{t\to-\infty} e.\left(-t.e^{t}+e^{t}\right) = 0$. Ce résulte se traduit par une asymptote horizontale d'équation $y=0$ en $+\infty$.

**2)** **a –** $\forall x \in \mathbb{R}$ ; $f'(x) = 1.e^{1-x}+(x+1).\left(-e^{1-x}\right) = (1-x-1).e^{1-x} = -x.e^{1-x}$.

**b –** Le signe de $f'(x)$ est celui de $-x$ d'où le tableau ci-contre.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | | $e$ | | $0$ |

**3)** **a –** $\forall x \in \mathbb{R}$ ; $f''(x) = -e^{1-x}+(-x).\left(-e^{1-x}\right) = (x-1).e^{1-x}$.

Le signe de $f''(x)$ est celui de $x-1$ d'où le tableau ci-contre.

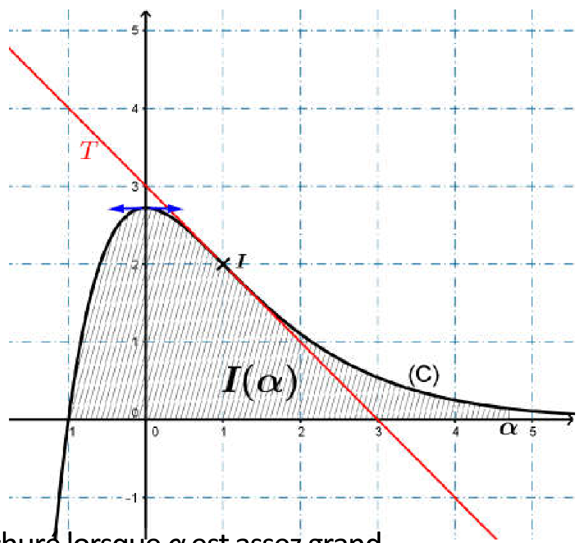
| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

La dérivée seconde s'annule en 1 en changeant de signe donc le point $I$ d'abscisse 1 est un point d'inflexion de la courbe de $f$. $f(1) = 2$ donc $I(1,2)$.

**b –** $T : y = f'(1)(x-1)+f(1) \Rightarrow T : y = -1(x-1)+2$

$\Rightarrow T : y = -x+3$.

**4)** Graphique complet :




**5)** **a –** Lorsque $x \geq -1$ ; $f(x) \geq 0 \Rightarrow I(\alpha)$ est l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-1$ et $x=\alpha$.

**b –** $f''(x)+2e^{1-x} = (x-1)e^{1-x}+2e^{1-x} = (x+1)e^{1-x} = f(x)$.

**c –** $I(\alpha) = \left[f'(x)-2e^{1-x}\right]_{-1}^{\alpha} = -\alpha e^{1-\alpha}-2e^{1-\alpha}-e^{2}+2e^{2} =$

$e^{2}-(2+\alpha)e^{1-\alpha}$

**d –** $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I(\alpha) = e^{2}$. Cette limite est l'aire limite du domaine hachuré lorsque $\alpha$ est assez grand.

## Exercice 4

**1)** La courbe de f est située au-dessous de la droite des abscisses donc :

$\forall x\in[0,+\infty[\ ;f(x)\leq 0\Leftrightarrow \forall x\in[0,+\infty[,\ln(1+x^2)\leq 0$.

**2)** **a –** Soit la propriété $(\mathcal{P}_n):U_n>0,\forall n\in\mathbb{N}$.

- On a $U_0=\frac{3}{2}$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
- Montrons que $(\mathcal{P}_n)$ entraine $(\mathcal{P}_{n+1})$

  $U_n>0\Rightarrow 1+U_n^{\ 2}>1\Rightarrow \ln(1+U_n^{\ 2})>0\Rightarrow U_{n+1}>0$ c.à.d $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.

Ainsi d'après le principe de récurrence, on a $U_n>0,\forall n\in\mathbb{N}$.

**b –** $U_n>0$ donc, d'après **1)**, on a $\ln(1+U_n^{\ 2})\leq U_n\Leftrightarrow\frac{1}{2}\ln(+U_n^{\ 2})\leq\frac{1}{2}U_n\Leftrightarrow U_{n+1}\leq\frac{1}{2}U_n$ .

**c –** Soit la propriété $(\mathcal{P}'_n):U_n\leq\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n,\forall n\in\mathbb{N}$.

- On a $U_0=\frac{3}{2}\leq\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^0$ donc $(\mathcal{P}'_0)$ est vraie.
- Montrons que $(\mathcal{P}'_n)$ entraine $(\mathcal{P}'_{n+1})$.

On a $U_n\leq\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n\Leftrightarrow\frac{1}{2}U_n\leq\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ Or d'après **2) b –**, on a $U_{n+1}\leq\frac{1}{2}U_n$ ce qui donne par transition

$U_{n+1}\leq\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\Leftrightarrow(\mathcal{P}'_{n+1})$ est vraie.

Ce raisonnement par récurrence permet de conclure que $\forall n\in\mathbb{N},U_n\leq\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

**d –** On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ car $\frac{1}{2}\in]-1,1[$ et $0<U_n\leq\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$.

**Conclusion :** La suite $(U_n)$ converge vers 0.

**3)** **a –** $S_{n+1}-S_n=U_{n+1}>0$ donc la suite $(S_n)$ est strictement croissante.

**b –** $\forall k\in\mathbb{N},U_k\leq\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k\Rightarrow S_n\leq\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{3}{2}\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{3}{2}.\frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2}=3\left(1-(1/2)^{n+1}\right)=3-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

**c –** $S_n\leq 3-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $3-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n<3$ donc $(S_n)$ est majorée par 3 et comme elle est croissante donc elle est convergente d'après le théorème de convergence des suites monotones.