REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT - SESSION DE JUIN 2010

SESSION DE CONTRÔLE

SECTION : MATHEMATIQUES

EPREUVE : MATHEMATIQUES DUREE : 4h COEFFICIENT : 4

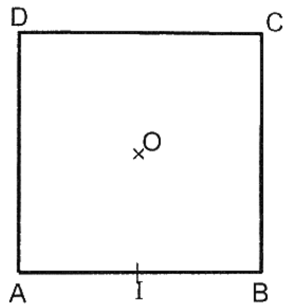
Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4

Exercice 1(4 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

ABCD est un carré de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et I le milieu de [AB].

Soit $S_{(BC)}$, $S_{(BD)}$ et $S_{(OI)}$ les symétries d'axes respectifs (BC), (BD) et (OI) et $t_{\overrightarrow{BD}}$; $t_{\overrightarrow{CD}}$ et $t_{\overrightarrow{BC}}$ les translations de vecteurs respectifs $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BC}$.



1) L'isométrie $S_{(BC)} \circ S_{(BD)} \circ t_{\overrightarrow{BD}}$ est

a) une rotation
b) une translation
c) une symétrie glissante.

2) $t_{\overrightarrow{BD}} \circ S_{(BC)}$ est égale à

a) $t_{\overrightarrow{CD}} \circ S_{(OI)}$
b) $t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{(OI)}$
c) $S_{(BC)}$.

3) Soit r_1 la rotation de centre O d'angle $(-\frac{\pi}{2})$ et r_2 la rotation de centre C d'angle $(\frac{\pi}{2})$.

$r_1 \circ r_2$ est

a) la symétrie centrale de centre A
b) la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$
c) la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

4) Soit S la similitude directe de centre B qui transforme D en A. Alors
a) S(A) = O
b) S(I) = O
c) S(C) = O.

Exercice 2 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{(x-2)e^x}{x^3}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{e^x(x^2 - 4x + 6)}{x^4}$.

   b) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

   c) Dresser le tableau de variation de f.

2) Montrer que la tangente Δ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 a pour équation $y = \dfrac{e^2}{8}(x-2)$.

3) On se propose d'étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de sa tangente Δ.

   Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{e^x}{x^3}$. On donne ci-dessous le tableau de variation de g.

x	0		2		3		$+\infty$
g(x)	‖ $+\infty$	↘	$\dfrac{e^2}{8}$	↘	$\dfrac{e^3}{27}$	↗	$+\infty$

   a) Montrer que l'équation $g(x) = \dfrac{e^2}{8}$ admet dans $]3, +\infty[$ une solution unique α telle que $4{,}2 < \alpha < 4{,}3$.

   b) Déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et Δ.

4) Justifier l'existence sur $]0,+\infty[$ d'une primitive F de f telle que $F(1) = e$.

5) Dans l'annexe ci-jointe, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_F$ de la fonction F, la droite Δ et le rectangle ABCD tel que $A(1, e)$; $B(0, e)$; $C(0, F(2))$ et $D(1, F(2))$.

   a) Etudier les branches infinies de $\mathscr{C}_f$.

   b) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans l'annexe ci-jointe.

6) Soit $t \in [1, 2[$. On désigne par S(t) la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe $(O, \vec{i})$ et les droites d'équations $x = t$ et $x = 2$. On désigne par $\mathscr{A}(t)$ l'aire de S(t).

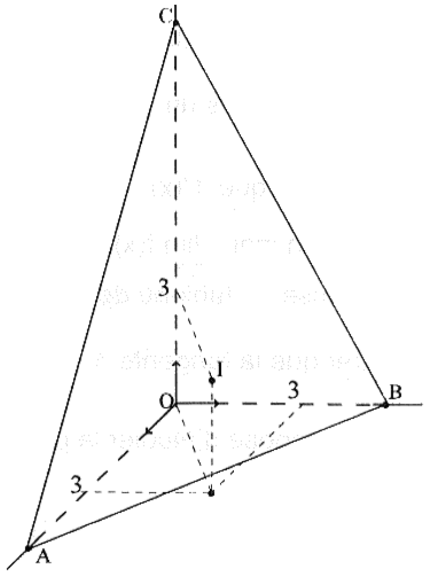
   a) Exprimer $\mathscr{A}(t)$ en fonction de F(t).

   b) Hachurer S(1) et justifier qu'elle a la même aire que le rectangle ABCD.

   c) Montrer qu'il existe un unique $t_0 \in [1, 2[$ tel que $\mathscr{A}(t_0) = \dfrac{1}{2}\mathscr{A}(1)$.

   d) Construire le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse t_0.

Exercice 3 (5 points)



Soit $(O,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ un repère orthonormé direct de l'espace.

Dans la figure ci-contre OABC est un tétraèdre

tel que $\overrightarrow{OA} = 5\vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = 5\vec{v}$, $\overrightarrow{OC} = 10\vec{w}$ et

I est le point de coordonnées (3,3,3).

1) Vérifier que le plan (ABC) a pour équation
$2x + 2y + z - 10 = 0$.

2) Soit S la sphère de centre I et de rayon 3.
   a) Quelle est la position relative de S et du plan (ABC) ?
   b) Montrer que S est tangente aux plans (OAB) , (OAC) et (OBC).

3) Soit k un réel non nul et h l'homothétie de centre O et de rapport k.
   On désigne par S' , la sphère image de S par h.
   a) Montrer que S' est tangente aux plans (OAB) , (OAC) et (OBC).
   b) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles S' est tangente au plan (ABC).

4) Déterminer le centre et le rayon de la sphère tangente intérieurement aux quatre faces du tétraèdre OABC.

Exercice 4 (5 points)

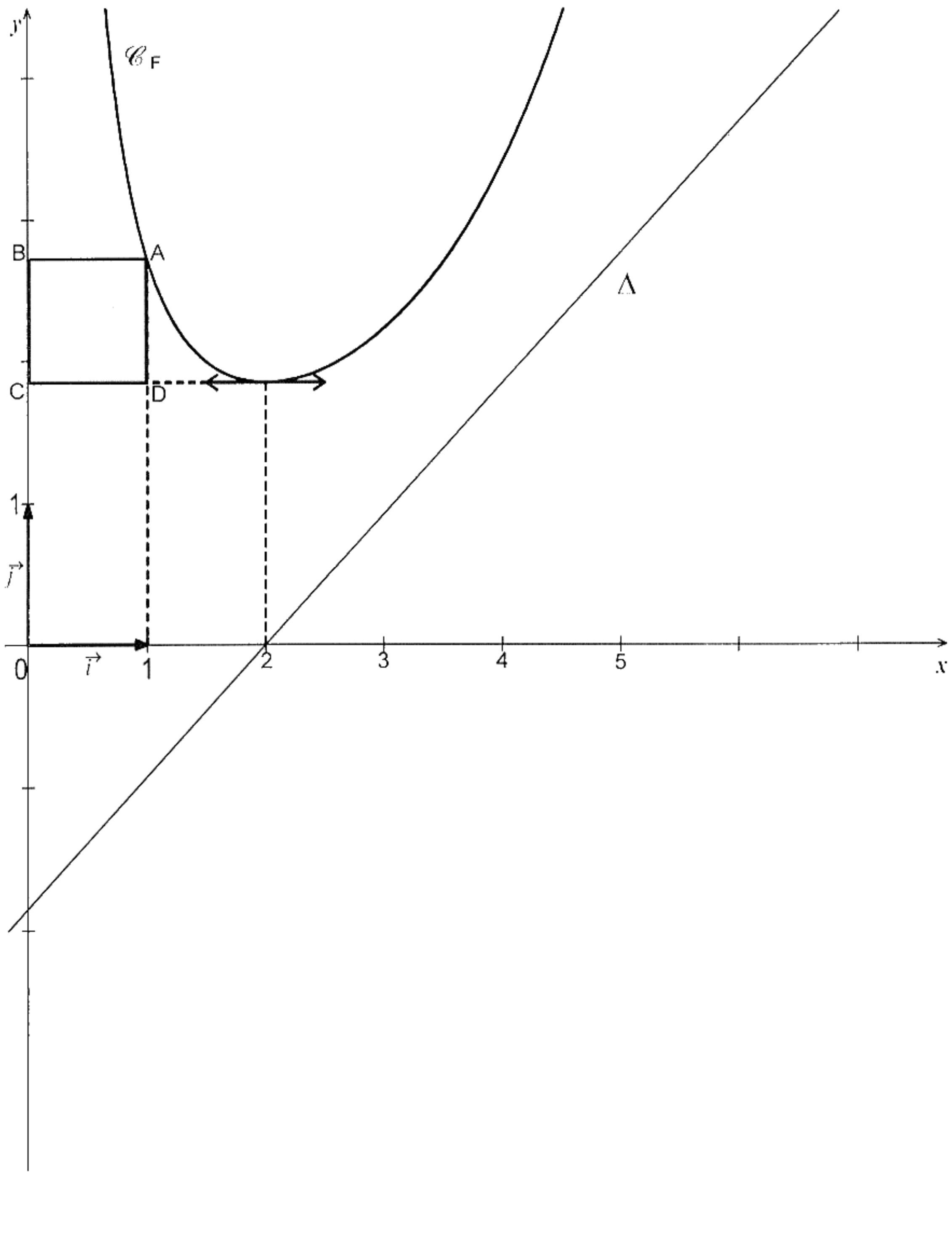
On pose $a = 7^{2009} + 7^{2010} + 7^{2011}$.

1) Soit n un entier naturel. Discuter suivant les valeurs de n, le reste de 7^n modulo 100.

2) En déduire qu'il existe un entier naturel k tel que $a = 100k - 1$.

3) a) En utilisant la formule du binôme, montrer que $a^{100} \equiv 1 \pmod{100^2}$.
   b) Déterminer les quatre derniers chiffres de a^{100}.

ANNEXE A RENDRE AVEC LA FEUILLE DE COPIE



Exercice 1 :

1. a ; 2.b ; 3. b; 4. c ;

Exercice 2 :

Soit f(x) = $\frac{(x-2)e^x}{x^3}$, où $x > 0$.

1. a) Pour tout x > 0 ,

$$f'(x)=\frac{\left[e^x+(x-2)e^x\right].x^3-3x^2(x-2)e^x}{x^6}=\frac{e^x(x-1)x-(3x-6)e^x}{x^4}=\frac{e^x\left(x^2-4x+6\right)}{x^4}.$$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)\frac{e^x}{x^3}=+\infty$.

c) Pour tout x > 0 , $x^2-4x+6=(x-2)^2+2>0$ donc $f'(x)>0$.

D'où le tableau de variation de f :

x	0	$+\infty$
f '(x)	‖	+
f(x)	‖ $-\infty$	↗ $+\infty$

2. On a : f(2) = 0 et $f'(2)=\frac{2e^2}{16}=\frac{e^2}{8}$ la tangente (Δ) à ($\mathscr{C}_f$) la courbe représentative de f a pour équation $y=\frac{e^2}{8}(x-2)$.

3. a) On a : g est continue et strictement croissante sur $[3,+\infty[$, $g([3,+\infty[)=\left[\frac{e^3}{27},+\infty\right[$ et $\frac{e^2}{8}\in\left[\frac{e^3}{27},+\infty\right[$ donc l'équation f(x) $=\frac{e^2}{8}$ admet une unique solution α dans $]3,+\infty[$.

$f(4,2)\approx 0,9$, $f(4,3)\approx 0,9269$ et $\frac{e^2}{8}\approx 0,923$

D'où $f(4,2)-\frac{e^2}{8}\approx -0,023$ et $f(4,3)-\frac{e^2}{8}\approx 0,0039$ donc $4,2<\alpha<4,3$.

b) Pour tout x > 0, $f(x)-\frac{e^2}{8}(x-2)=(x-2)\left(\frac{e^x}{x^3}-\frac{e^2}{8}\right)=(x-2)\left[g(x)-g(2)\right]$.

Or $g(x)=\frac{e^2}{8}\Leftrightarrow x=2$ ou $x=\alpha$.

Comme g est strictement décroissante sur $]0,3]$ alors :

- $0 < x < 2 \Rightarrow g(x)>g(2)\Rightarrow g(x)-g(2)>0$
- $2 < x \leq 3 \Rightarrow g(2)>g(x)\Rightarrow g(x)-g(2)<0$

D'autre part , g est strictement croissante sur $[3,+\infty[$, donc

- $3\leq x<\alpha \Rightarrow g(x)<g(\alpha)\Rightarrow g(x)-g(2)<0$
- $2 < x$ $x>\alpha \Rightarrow g(x)>g(\alpha)\Rightarrow g(x)-g(2)>0$

D'où le tableau de signe de g(x) :

x	0		2		α		$+\infty$
g(x)- g(2)	||	+	0	-	0	+	

IL en résulte :

x	0		2		α		$+\infty$
g(x)- g(2)	||	+	0	-	0	+	
x - 2	||	-	0	+		+	
Position de ($\mathscr{C}_f$) par rapport à (Δ)	||	au dessous	0	au dessous	0	au dessus	

($\mathscr{C}_f$) coupe (Δ) aux points d'abscisse 2 et α .

4. La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ et 1 > 0 donc f admet sur $]0,+\infty[$ une unique primitive F telle que F(1) = e.

5. a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ donc l'axe des ordonnées est asymptote à ($\mathscr{C}_f$).

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} (x-2)\frac{e^x}{x^4} = +\infty$ donc ($\mathscr{C}_f$) admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

b) Voir figure.

6. a)La fonction f est continue et négative sur l'intervalle [t , 2] pour tout t $\in [1,2[$ donc l'aire de S(t) est

$\mathscr{A}$(t) = $-\int_t^2 f(x)dx = -[F(x)]_t^2 = F(t) - F(2).$

b) L'aire de S(1) est $\mathscr{A}$(1) = $e - F(2)$.

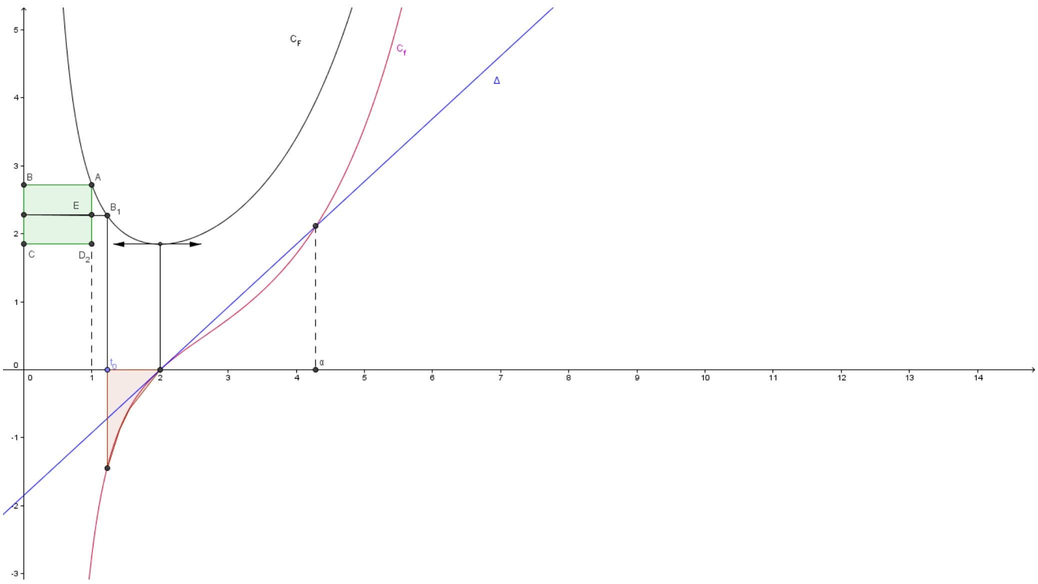
Or l'aire du rectangle ABCD est : AB. BC = 1.$[e - F(2)] = e - F(2)$ donc $\mathscr{A}$(1) = aire(ABCD).

c) $\mathscr{A}$(t) = $\frac{1}{2}$ $\mathscr{A}$(1) $\Leftrightarrow F(2) - F(t) = \frac{1}{2}[F(2) - e] \Leftrightarrow F(t) = \frac{1}{2}[F(2) + e]$.

F est continue et strictement décroissante sur l'intervalle [1, 2[, F([1, 2[) =]F(2) , e]

et $\frac{1}{2}[F(2)+e] \in]F(2), e]$ donc l'équation $\mathscr{A}$(t) = $\frac{1}{2}$ $\mathscr{A}$(1) admet une unique solution t_0 dans [1,2[.

d) Soit I le milieu du segment [BC] , l'ordonnée de I est $F(t_0)$. Soit J le point d'abscisse 2 de la courbe ($\mathscr{C}_F$) , la droite (IJ) coupe l'arc $[AJ]$ de ($\mathscr{C}_F$) en un seul point K d'abscisse t_0.



Exercice 3:

1. On a : A(5, 0, 0) , B(0, 5, 0) , C(0, 0, 10) . Soit le plan (P) : 2x + 2y + z -10 = 0.

   10 + 0 + 0 - 10 = 0 donc $A \in (P)$; 0 + 10 + 0 - 10 = 0 donc $B \in (P)$;

   0 + 0 + 10 - 10 = 0 donc $C \in (P)$.

   Ainsi P= (ABC) et par suite (ABC) : 2x + 2y + z -10 = 0.

2. Soit (S) la sphère de centre I(3, 3, 3) et de rayon 3.

   a) La distance du point I au plan (ABC) est $d(I,(ABC)) = \frac{|6+6+3-10|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{5}{3} < 3$ donc (S) et (ABC) sont sécant suivant un cercle.

   b) Une équation du plan (OAB) est z = 0 donc $d(I,(OAB)) = \frac{|3|}{\sqrt{1}} = 3$.

   Une équation du plan (OAC) est y = 0 donc $d(I,(OAC)) = \frac{|3|}{\sqrt{1}} = 3$.

   Une équation du plan (OBC) est x = 0 donc $d(I,(OAB)) = \frac{|3|}{\sqrt{1}} = 3$.

   Donc (S) et tangente aux plans (OAB) , (OAC) et (OBC).

3. a) (S) et tangente aux plans (OAB) , (OAC) et (OBC) donc S' = h(S) est tangente aux plans h((OAB)) = (OAB) , h((OAC)) = (OAC) et h((OBC))= (OBC).

   b) Le centre de (S') est I' = h(I) donc I'(3k, 3k, 3k).

   $$d(I',(ABC)) = \frac{|6k+6k+3k-10|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{|15k-10|}{3} .$$

Pour que (S') soit tangente au plan (ABC) , il faut et il suffit que

$$d(I',(ABC)) = 3|k| \Leftrightarrow \frac{|15k-10|}{3} = 3|k| \Leftrightarrow |15k-10| = 9|k| \Leftrightarrow 15k-10 = 9k \text{ ou } 15k-10 = -9k$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{5}{3} \text{ ou } k = \frac{5}{12} .$$

4. Lorsque $k=\frac{5}{3}$, l'image du point I par h est $I''(5,5,5)$; I'' est à l'extérieur du tétraèdre OABC.

Pour que la sphère (S') soit tangente intérieurement aux quatre faces du tétraèdre OABC , il faut que $k=\frac{1}{15}$. Donc le centre de (S') est $I'\left(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$ et son rayon est $3\times\left|\frac{1}{15}\right|=\frac{1}{5}$.

Exercice 4

1. Soit n un entier .

On a : $7\equiv 7\,(\text{mod}100)$, $7^2\equiv 49\,(\text{mod}100)$, $7^3\equiv 43\,(\text{mod}100)$ et $7^4\equiv 1\,(\text{mod}100)$

Il en résulte : Si n = 4p , $p\in\mathbb{N}$, alors $7^n\equiv 1\,(\text{mod}100)$

Si n = 4p + 1 , $p\in\mathbb{N}$, alors $7^n\equiv 7\,(\text{mod}100)$

Si n = 4p + 2 , $p\in\mathbb{N}$, alors $7^n\equiv 49\,(\text{mod}100)$

Si n = 4p + 3 , $p\in\mathbb{N}$, alors $7^n\equiv 43\,(\text{mod}100)$

2. On a d'une part: $a=7^{2009}+7^{2010}+7^{2011}$.

D'autre part : 2009 = 4 x 502 + 1 donc $7^{2009}\equiv 7^{4\times502+1}\,(\text{mod}100) \Leftrightarrow 7^{2009}\equiv 7\,(\text{mod}100)$

2010 = 4 x 502 + 2 donc $7^{2010}\equiv 7^{4\times502+2}\,(\text{mod}100) \Leftrightarrow 7^{2010}\equiv 49\,(\text{mod}100)$

2011 = 4 x 502 + 3 donc $7^{2011}\equiv 7^{4\times502+3}\,(\text{mod}100) \Leftrightarrow 7^{2011}\equiv 43\,(\text{mod}100)$

D'où $7^{2009}+7^{2010}+7^{2011}\equiv 99\,(\text{mod}100) \Leftrightarrow a\equiv -1\,(\text{mod}100)$.

Ainsi , il existe un entier naturel k tel que a = 100k – 1.

3. a) $a^{100}=(100k-1)^{100}=\sum_{i=0}^{100}C_{100}^{i}(100k)^{100-i}(-1)^{i}$

$$=(100k)^{100}-100\times(100k)^{99}+C_{100}^{2}(100k)^{98}-C_{100}^{3}(100k)^{97}+\dots+C_{100}^{98}(100k)^{2}-100\times100k+1$$

$$=100^2\left[k^2(100k)^{98}-k(100k)^{98}+k^2C_{100}^{2}(100k)^{97}-\dots+k^2-k\right]+1$$

Par suite $a^{100}\equiv 1\,(\text{mod}100^2)$

b) On sait que $a^{100}\equiv 1\,(\text{mod}100^2)$ donc $a^{100}\equiv 100^2+1\,(\text{mod}100^2)$ d'où les quatre derniers chiffres de a^{100} sont 0001.