Cours élaboré par : prof SFAXI SALAH

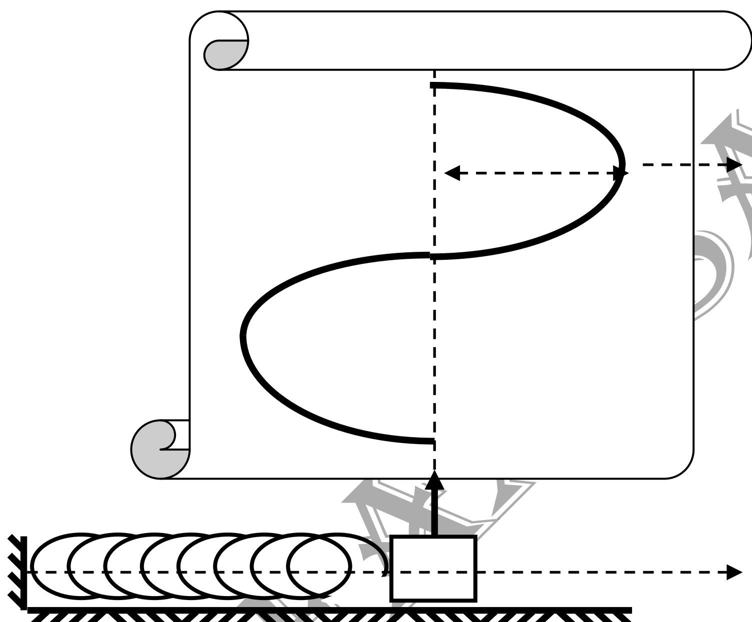
CLASSES : 4EME SC-MATH-TEC ANNEE : 2010/2011

CHAPITRE : OSCILLATIONS LIBRES D'UN PENDULE ELASTIQUE

PARTIE A : OSCILLATIONS LIBRES NON AMORTIES

I) Dispositif expérimental

1) Expérience

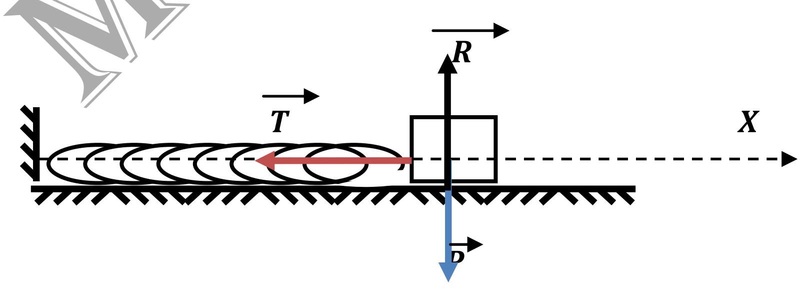


2) Interprétation

Les oscillations libres non amorties d' un pendule élastique sont rectilignes sinusoïdales dont l'élongation X(t) est de la forme : $X(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x)$.

II) Etude théorique

1) Equation différentielle



D'après la relation fondamentale de la dynamique (RFD) on a :

$X^2(m^2)$

$$\Sigma \overrightarrow{Fext} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{T}$$

Projection sur l'axe $\overrightarrow{X'X}$: $-\|\vec{T}\| = m.\vec{a}$

Donc : $-k.x = m.d^2x/dt^2 \longrightarrow m.d^2x/dt^2 + k.x = 0$

$$\boxed{d^2x/dt^2+(k/m).x = 0} \quad (E)$$

c'est l'équation différentielle d'un oscillateur mécanique dont la pulsation propre est $\omega_0 = \sqrt{(k/m)}$ et dont la solution générale est de la forme :

$$\boxed{X(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x)}$$

2) Expression de la vitesse V(t)

On sait que $V(t) = dx(t)/dt = \omega_0.X_m.\cos(\omega_0 t + \varphi_x) = \omega_0.X_m.\sin s(\omega_0 t + \varphi_x+\pi/2)$

C'est de la forme : $V(t) = V_m.\sin(\omega_0 t + \varphi_v)$ avec : $V_m = \omega_0.X_m$ et $\varphi_v = \varphi_x+\pi/2$

Remarque

X(t) et V(t) sont en quadrature de phase , la vitesse V(t) est en quadrature avance par rapport à X(t).

III) Etude énergétique d'un pendule élastique

On s'intéresse aux pendules élastique disposés horizontalement .

Lorsqu'un pendule élastique est disposé horizontalement , il possède trois formes d'énergies , une énergie cinétique notée Ec , une énergie potentielle élastique notée Ep et une énergie mécanique notée E qui est la somme des deux énergies .

$$\boxed{E = Ec + Ep}$$

1) Energie cinétique Ec

L'énergie cinétique Ec d'un solide de masse m en mouvement est définie par la relation suivante : $\boxed{Ec = \frac{1}{2} m.V^2}$

La masse m doit être exprimée en Kg et V en $m.s^{-1}$

- **Expression de Ec en fonction de temps**

  On sait que : $V(t) = \omega_0.X_m.\cos(\omega_0 t + \varphi_x)$ ce qui donne :

  $Ec = \frac{1}{2}m.\omega_0^2.X_m^2\cos^2(\omega_0 t +\varphi_x)$ or $\omega_0^2 = k/m$

$X^2(m^2)$

Ce qui donne : $$\boxed{Ec = \frac{1}{2}k.X_m^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_x)}$$

Remarque :

On peut montrer que Ec s'écrit sous la forme d'une fonction sinusoïdale et d'un terme constant .

C'est-à-dire : $Ec = A.\sin(\omega t + \Phi) + B$ *où A , B , ω , et Φ à déterminer .*

Mathématiquement on a : $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ *or* $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

Donc : $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

Finalement on aura : $$\boxed{Ec = \frac{1}{4}kx_m^2\sin(2\omega_0 t + 2\varphi_x + \pi/2) + \frac{1}{4}kx_m^2}$$

$$\begin{cases} A = B = \frac{1}{4}kx_m^2 \\ \Phi = 2\varphi_x + \pi/2 \end{cases}$$

2) Energie potentielle élastique Ep

L'énergie potentielle élastique d'un système déformable (ressort) dépend de ses caractéristiques , elle est définie par la relation suivante :

$$\boxed{Ep = \frac{1}{2}k.X^2}$$

Avec : $X(t) = X_m\sin(\omega_0 t + \varphi_x)$ *ce qui donne finalement :*

$$\boxed{Ep = \frac{1}{2}k.X_m^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_x)}$$

Remarque :

On montrer que : $$\boxed{Ep = \frac{1}{4}kx_m^2\sin(2\omega_0 t + 2\varphi_x - \pi/2) + \frac{1}{4}kx_m^2}$$

3) Energie mécanique E

On sait que : $E = Ec + Ep$

Donc : $$E = \frac{1}{2}k.X_m^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_x) + \frac{1}{2}k.X_m^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_x)$$

$X^2(m^2)$

$$E = \frac{1}{2}k.X_m^2\,[\cos^2(\omega_0 t + \varphi_x) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi_x)] = \frac{1}{2}\,k.X_m^2 = cte$$

$$E = \frac{1}{2}\,k.X_m^2 = \frac{1}{2}\,m.V_m^2 = cte$$

Remarque :

$E = cte \longrightarrow dE/dt = 0$

$\longrightarrow m.V.dV/dt + k.X.dx/dt = 0$ or $V = dx/dt \neq 0 m.s^{-1}$

$\longrightarrow V.[\,md^2x/dt^2 + k.x\,] = 0$

$\longrightarrow md^2x/dt^2 + k.x = 0$ c'est l'équation différentielle .

IV) Etude de quelques courbes

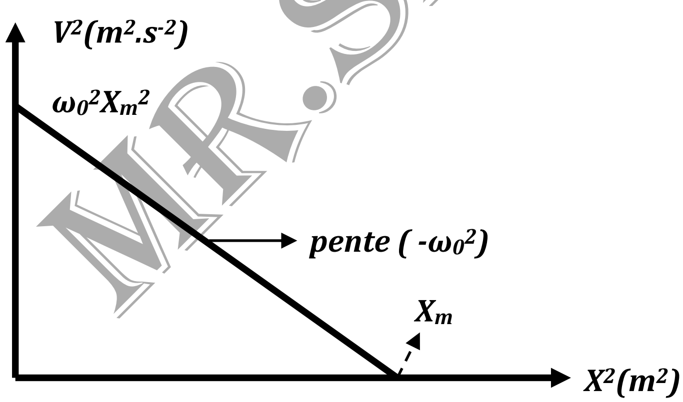
1) Courbes $V^2 = f(X^2)$

$$\begin{cases} X(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x) \longrightarrow X/X_m = \sin(\omega_0 t + \varphi_x)\ (1) \\ V(t) = V_m \cos(\omega_0 t + \varphi_x) \longrightarrow V/V_m = \cos(\omega_0 t + \varphi_x)\ (2) \end{cases}$$

$(1)^2 + (2)^2 \longrightarrow (X/X_m)^2 + (V/V_m)^2 = 1$

$\longrightarrow (X/X_m)^2 + (V/\omega_0.Xm)^2 = 1$

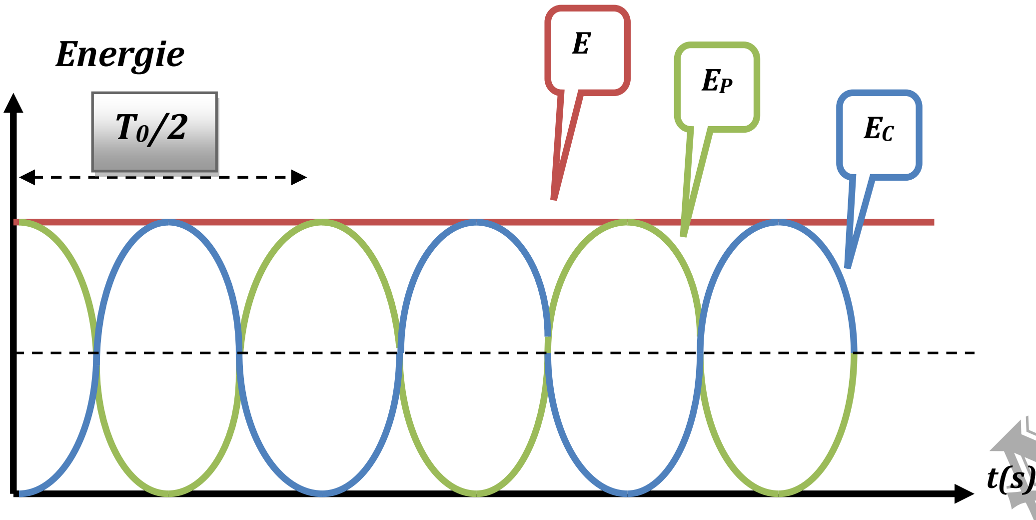
Ce qui donne finalement : $\boxed{V^2 = -\,\omega_0^2 X^2 + \omega_0^2 X_m^2}$



2) Courbes Ec(t) , Ep(t) et E(t)

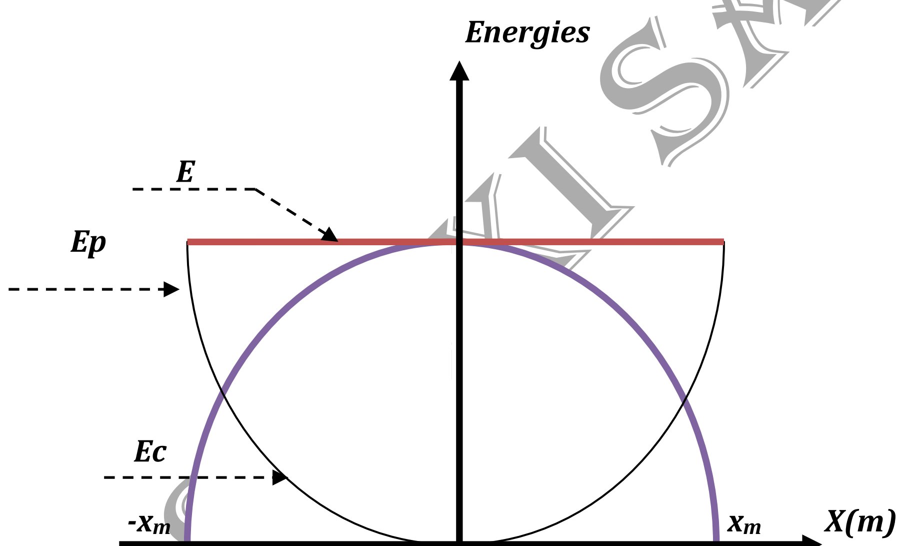
$$Ec = \frac{1}{2}k.X_m^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_x)\ ,\ Ep = \frac{1}{2}k.X_m^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_x)\ ,\ E = \frac{1}{2}\,k.X_m^2$$

$X^2(m^2)$



3) Courbes $Ec=f(x)$, $Ep=g(x)$ et $E=h(x)$

On a : $Ep = \frac{1}{2}k.X^2$, $E = \frac{1}{2} k.X_m^2$ ce qui donne $Ec = \frac{1}{2} k.X_m^2 - \frac{1}{2} k.X^2$

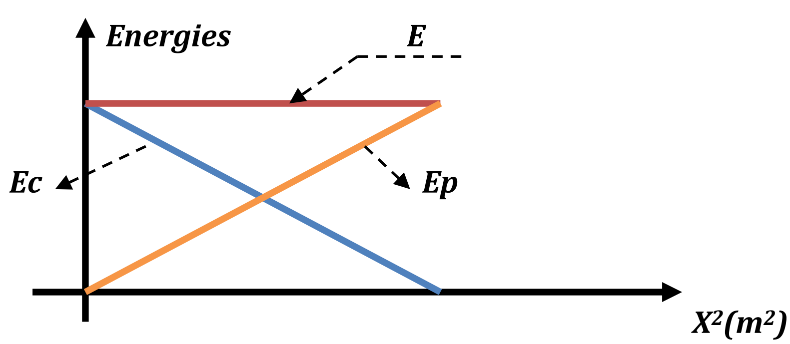


REMARQUE

Les oscillations libres non amorties d'un pendule élastique sont auto-entretenues parles transformations mutuelles de ses énergie Ec et Ep.

4) Courbes $Ec =f(x^2)$, $Ep =g(x^2)$ et $E =h(x^2)$

On a : $Ep = \frac{1}{2}k.X^2$, $E = \frac{1}{2} k.X_m^2$ ce qui donne $Ec = \frac{1}{2} k.X_m^2 - \frac{1}{2} k.X^2$

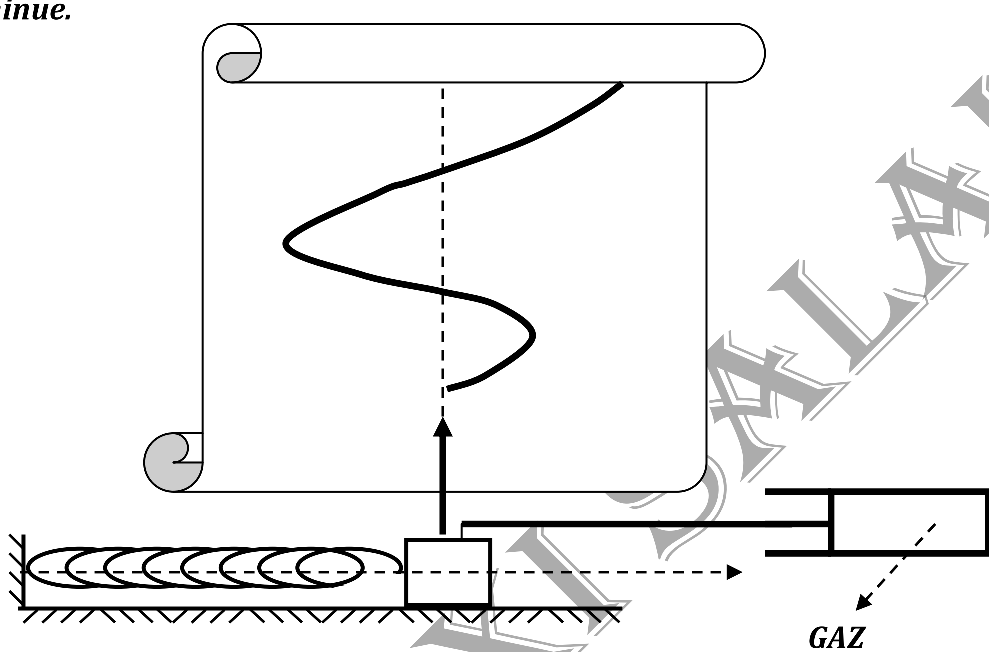


PARTIE B : OSCILLATIONS LIBRES AMORTIES

I) Etude expérimentale

1) Expérience

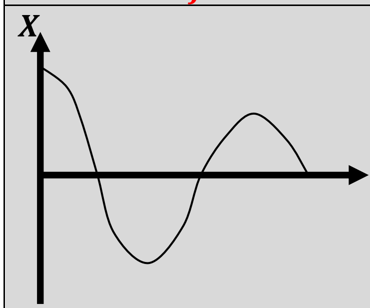
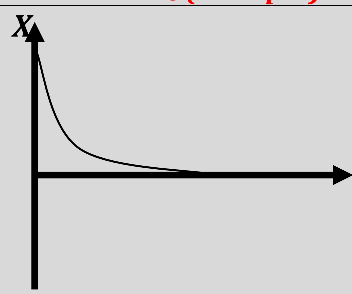
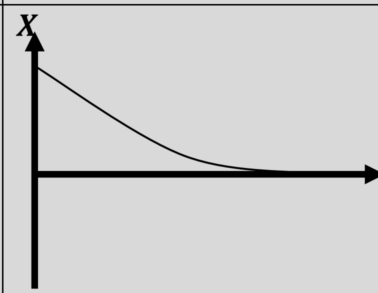
les enregistrements montrent que les oscillations sont amorties puisque l'amplitude diminue.



2) Interprétation

la courbe montre que l'amplitude des oscillations décroit . Cette décroissance est d'autant plus grande que l'amortissement est plus important .

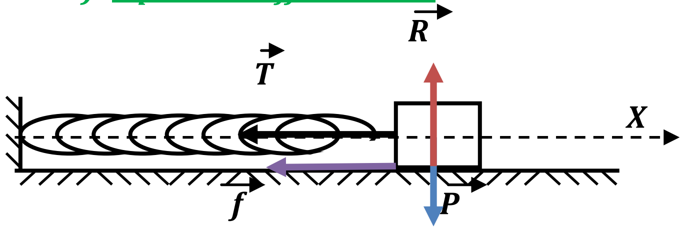
3) Effet de l'amortissement sur la courbe

h faible	$h = h_C$ (critique)	h est très élevée
 Régime pseudopériodique	 Régime critique	 Régime apériodique

$X^2(m^2)$

II) Etude théorique

1) Equation différentielle



D'après la relation fondamentale de la dynamique on a :

$\Sigma \overrightarrow{Fext} = m.\vec{a}$

$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} + \vec{T} = m.\vec{a}$

<u>*Projection sur l'axe $\overrightarrow{X'X}$*</u>

$-\|\vec{T}\| - \|\vec{f}\| = m.d^2x/dt^2 \longrightarrow$ $$m.d^2x/dt^2 + h.dx/dt + k.x = 0 \quad (E)$$

(E) est l'équation différentielle d'un oscillateur mécanique amorti .

Cette équation admet des solutions qui dépendent de la valeur de h et qui donnent les régimes mises en évidence expérimentalement .

2) Energie mécanique et sa non conservation

On sait que : $E = \frac{1}{2} m.V^2 + \frac{1}{2} k.X^2$

$dE/dt = m.V.dV/dt + k.X.dX/dt = V.[m.d^2x/dt^2 + k.X] = - h.V^2 < 0$ j

$$\boxed{dE/dt = - h.V^2}$$

<u>**conclusion :**</u> ***l'énergie mécanique diminue , cette diminution est due aux frottements .***

III) Analogie entre un oscillateur mécanique et un oscillateur électrique

Pendule élastique	Circuit RLC serie
Masse m	Inductance L
Raideur k	1/C
Coefficient de frottement h	Résistance R_{TOT}
Elongation X(t)	Charge q(t)
Vitesse V(t)	Intensité du courant i(t)
$d^2x/dt^2 + (k/m).x = 0$ (si $h = 0 kg.s^{-1}$)	$d^2q/dt^2 + (1/LC).q = 0$ (si $R_{TOT} = 0\Omega$)
$m.d^2x/dt^2 + h.dx/dt + k.x = 0$	$L.d^2q/dt^2 + h.dq/dt + (1/C).q = 0$

$X^2(m^2)$

Energie potentielle élastique $\frac{1}{2}$ k.X^2	***Energie électrique Ec = $\frac{1}{2}$ q^2/C***
Energie cinétique Ec = $\frac{1}{2}$ m.V^2	***Energie magnétique E_L = $\frac{1}{2}$ L.i^2***
Energie mécanique E = $\frac{1}{2}$ k.X^2 + $\frac{1}{2}$ m.V^2	***Energie électromagnétique*** ***E = $\frac{1}{2}$ q^2 + $\frac{1}{2}$ L.i^2***
Si h = 0 kg.s^{-1} ***E = $\frac{1}{2}$ k.X_m^2 = $\frac{1}{2}$ m.V_m^2***	***Si R_{TOT} = 0 Ω*** ***E = $\frac{1}{2}$ q_m^2/C = $\frac{1}{2}$ L.I_m^2***
Si h ≠ 0kg.s^{-1} ***dE/dt = - h.V^2< 0***	***Si R_{TOT} ≠ 0 Ω*** ***dE/dt = - R_{TOT} . I^2< 0***

FIN CHAPITRE

X^2(m^2)