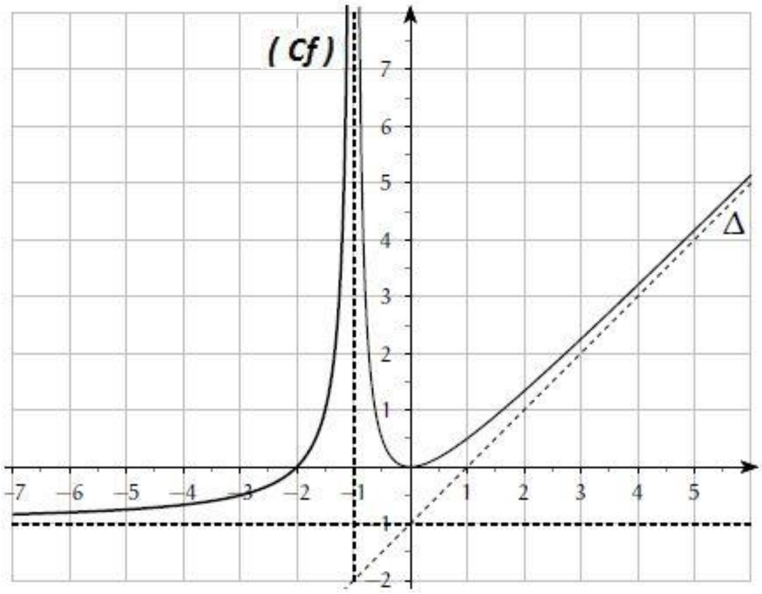
Lycée Houmet Souk	*Devoir de Contrôle N : 1*	*4 Sciences EXp 3*
Prof : Loukil Mohamed	*Durée : 2 Heures*	*11 - 11 - 2015*

EXERCICE N : 1 (6 points)



La courbe **(Cf)** ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur IR \{ - 1 } .

A) Par lecture graphique , déterminer :

1) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - x]$ et $f(]-\infty\,;-2])$.

2) Dresser le tableau de variations de f .

3) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solution(s) de l'équation : $f(x) = m$.

B) Soit la fonction g définie par : $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$.

1) Déterminer le domaine de définition de g .

2) Montrer que g est prolongeable par continuité en -1 .

C) Soit la fonction h définie par : $h(x) = f\circ f(x)$.

1) a) Justifier que h est définie sur IR \{ - 1 } .

b) Montrer que h est continue IR \{ - 1 } .

2) h est elle prolongeable par continuité en -1 ? justifier la réponse .

3) Déterminer $h(]-1\,;0[)$ et déduire qu'il existe au moins un réel $\alpha \in]-1\,;0[$ tel que $h(\alpha) = 2$.

EXERCICE N : 2 (6 points)

On considère les suites réelles (U_n) , (V_n) et (S_n) définies sur IN par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n + V_n}{3} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} V_0 = 12 \\ V_{n+1} = \dfrac{U_n + 3V_n}{4} \end{cases} \quad \text{et} \quad S_n = V_n - U_n .$$

1) a) Montrer que (S_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{12}$.

b) Exprimer alors , S_n en fonction de n puis déduire $\lim\limits_{n\to +\infty} S_n$.

2) a) *Montrer que pour tout entier naturel* n ; $U_n < V_n$.

b) *Montrer que la suite* (U_n) *est croissante et que* (V_n) *est décroissante sur IN* .

c) *Justifier que les deux suites* (U_n) *et* (V_n) *convergent vers la même limite* ℓ .

3) a) *Montrer que pour tout entier naturel* n ; $3 U_n + 4 V_n = 48$.

b) *Déduire alors la valeur de* ℓ .

EXERCICE N : 3 (8 points)

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O , \vec{u} , \vec{v})$. **(Unité : 4 cm)**

On donne les points A , B , C et D d'affixes respective $Z_A = 2$, $Z_B = -2$, $Z_C = 1$ *et* $Z_D = -1$.

Soit $f : P \setminus \{ O \} \to P$; $M_Z \mapsto M'_{Z'}$ *tel que* $Z' = \dfrac{Z^2 + 1}{Z}$.

A) 1) a) *Montrer que : Z est imaginaire pur* ***si et seulement si*** *Z ' est imaginaire* .

b) *Déterminer alors l'ensemble* Δ *des points M tels que* $M' \in (O ; \vec{v})$.

2) a) *Soit* $\theta \in IR$. *Montrer que :* $Z = e^{i\theta}$ ***alors*** $Z' = 2 \cos\theta$.

b) *Déduire que si le point M appartient au cercle* $\mathscr{C}(O ; 1)$ *alors M' appartient au segment [AB] .*

3) a) *Résoudre dans* ℂ *l'équation* $(\mathbf{E}_\theta)$: $Z^2 - 2 \cos \theta \; Z + 1 = 0$; $\theta \in IR$.

b) *Déduire que :* $Z' = 2 \cos\theta$ ***si et seulement si*** $Z = e^{i\theta}$ *ou* $Z = e^{-i\theta}$.

c) *Montrer que si le point M' appartient au segment [AB] alors le M appartient au cercle* $\mathscr{C}(O ; 1)$.

B) *On désigne par* ***M'' le symétrique de M par rapport à l'axe*** $(O , \vec{u})$.

1) a) *Vérifier que pour tout nombre complexe Z non nul on a :* $\dfrac{Z' - Z}{\overline{Z}} = \dfrac{1}{|Z|^2}$.

b) *Déduire que les vecteurs* $\overrightarrow{OM''}$ *et* $\overrightarrow{MM'}$ *sont colinéaires et que* $MM' = \dfrac{1}{OM}$.

2) *Montrer que : si* $M \in \mathscr{C}(O ; 1) \setminus \{ C , D \}$ *alors OMM'M'' est un losange* .

3) a) *Montrer que l'aire de OMM'M'' est* $\mathbf{A} = |\sin (2\theta)|$.

b) *Déduire les valeurs de* θ *pour lesquelles* $\mathbf{A}$ *est maximal* .

4) *Pour :* $Z = e^{i\frac{\pi}{12}}$, *construire les points M , M' et M''* .

Bon travail.