Lycée Houmet Souk	Devoir de Contrôle N : 2	4 Sciences EXp 3
Prof : Loukil Mohamed	Durée : 2 Heures	16 - 02 - 2016

EXERCICE N : 1 (3 points)

Pour chacune des propositions suivantes répondre par **vrai** ou **faux** en **justifiant la réponse** .

1) $f(x) = \dfrac{x-1}{\ln \circ \ln(x)}$. Le domaine de définition de f est $D_f =]1 ; +\infty[$.

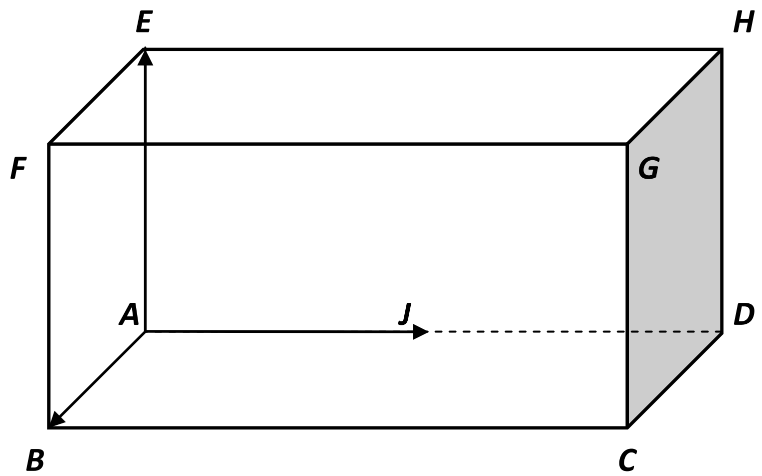
2) Dans **un repère orthonormé direct** on donne la droite $\Delta : \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = 1-\alpha \\ z = 2+\alpha \end{cases} ; \ (\alpha \in IR)$

et la sphère **(S)** de centre $\Omega(1, 0, -1)$ et de rayon $R = 3$, alors Δ et **(S)** sont sécantes .

3) On donne les fonctions F et G définies sur IR par : $F(x) = \dfrac{3x^2-4x+6}{x^2-2x+3}$ et $G(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-2x+3}$.

Les fonctions F et G sont deux primitives sur IR d'une même fonction .

EXERCICE N : 2 (7 points)



Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que: AB = 1 , AD = 2 et AE = 1 .
On désigne par J le milieu de l'arête [AD] .
L'espace (ξ) est rapporté au repère orthonormé direct **$(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AE})$** .

1) Déterminer les coordonnées des points F , G , H et J dans le repère **R** .

2) a) Montrer que le volume **V** du tétraèdre FGHJ est égal à $\dfrac{1}{3}$.

b) Montrer que le triangle FJH est rectangle en J .

c) Déduire la hauteur **h** du tétraèdre FGHJ issu du point G .

3) *Soit le vecteur* $\vec{N} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

a) *Montrer que* $\vec{N}$ *est un vecteur normal à (FJH) .*

b) *Déduire une équation cartésienne du plan (FJH) .*

c) *Retrouver alors la hauteur* **h** *par une autre méthode .*

4) a) *La droite (AG) est-elle perpendiculaire au plan (FJH) ? justifier la réponse .*

b) *Donner un système d'équations paramétriques de la droite (AG) .*

c) *Montrer que (AG) et (FJH) sont sécants au point* $k\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

5) *Soit* **(S)** *la sphère de centre G et passant par K .*

a) *Donner une équation cartésienne de* **(S)** .

b) *Etudier la position relative de* **(S)** *et (FJH) .*

EXERCICE N : 3 (10 points)

A) *On considère la fonction f définie sur* $]0,+\infty[$ *par :* $f(x) = 1 + \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$.

On note **(C f)** *sa courbe représentative dans le repère orthonormé* **R** $(O, \vec{i}, \vec{j})$.**(Unité : 2 cm)**

1) *Calculer* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. *Interpréter graphiquement le résultat obtenu .*

2) a) *Justifier que f est dérivable sur* $]0,+\infty[$ *et calculer* $f'(x)$.

b) *Dresser le tableau de variations de f .*

c) *Montrer que f admet une réciproque* f^{-1} *définie sur un intervalle* **J** *que l'on précisera .*

d) *Dresser le tableau de variations de* f^{-1} *sur* **J** .

3) a) *Montrer que* **(C f)** *coupe l'axe* $(O, \vec{i})$ *au point* $A\left(\frac{2}{e-1} ; 0\right)$. (*e* **est le nombre d'Euler**)

b) *Tracer* **(C f)** *et* **(** Cf^{-1} **)** *dans le repère* **R** .

B) 1) *Soit* $n \in IN^*$. *Montrer que l'équation :* $f(x) = \frac{1}{2n}$ *admet dans* $]0,+\infty[$ *une unique solution* α_n

2) *Placer les termes* α_1 , α_2 *et* α_4 *sur l'axe des abscisses .*

3) *Prouver que la suite* (α_n) *est décroissante sur* IN^* .

4) *Calculer la limite de la suite* (α_n) *quand n tend vers* $+\infty$.

C) *Soit la fonction F définie sur* $]0,+\infty[$ *par :* $F(x) = x(1 + \ln x) - (x+2)\ln(x+2)$.

1) *Prouver que F est une primitive de la fonction f sur* $]0,+\infty[$.

2) *Donner le sens de variations de F sur* $]0,+\infty[$.

Bon travail. ☺