Lycée Houmet Souk	Devoir de Contrôle N : 3	4 Sciences EXp 3
Prof : Loukil Mohamed	Durée : 2 Heures	06 - 04 - 2016

EXERCICE N : 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, indiquer la seule proposition correcte **en justifiant la réponse** .

1) On considère dans l'espace ξ muni du repère orthonormé direct $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les points

$A(1,0,0)$ et $B(0,1,0)$. La sphère (S) de centre O et tangente à (AB) a pour équation :

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ **b)** $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2}$ **c)** $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \frac{1}{2}$

2) La fonction exponentielle à base $\frac{1}{3}$ a pour fonction dérivée :

a) $x \mapsto 3^x \ln \frac{1}{3}$ **b)** $x \mapsto x(\frac{1}{3})^{x-1}$ **c)** $x \mapsto -(3)^{-x} \ln 3$

3) Le volume $\boldsymbol{V}$ du solide engendré par la rotation de l'arc :

$\overset{\frown}{AB} = \{ M(x;y) \in P$ tels que : $2 \leq x \leq e$ et $y = \dfrac{1}{\sqrt{x \ln^2(x)}} \}$ au tour de l'axe

des abscisses est :

a) $\pi[1 - \ln(2)]$ **b)** $\pi(\frac{1-\ln 2}{\ln 2})$ **c)** $\pi[\ln(2) - 1]$

EXERCICE N : 2 (5.5 points)

Une boite cubique contient treize billes , 10 rouges et 3 vertes .
Une deuxième boite cylindrique contient sept billes , 3 rouges et 4 vertes . Un enfant joue avec ses billes

A) Dans un premier jeu , il tire au hasard et simultanément trois billes de la boîte cubique .
On appelle X la variable aléatoire correspondant **au nombre de billes rouge(s) obtenue(s)** .

1) Déterminer la loi de probabilité de X .

2) Calculer l'espérance mathématique de X .

B) Un second jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boîtes , puis qu'il prenne une bille de cette boite choisie . On considère les évènements suivants :

$\mathbf{C_1}$: « L' enfant choisit la boite cubique » ; **R** : « L' enfant prend une bille rouge » .

1) a) Modéliser ce jeu par un arbre pondérée .

b) Déduire que $P(\mathbf{R}) = \frac{109}{182}$.

2) Sachant que l'enfant a tiré une boule rouge ,quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boite cubique ?

C) L'enfant reproduit n fois de suite son second jeu , $(n \in IN^*)$ en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place .

Soit L'évènement $\mathbf{D_n}$: « l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses n tirages ».

1) Montrer que $P(\mathbf{D_n}) = 1 - (\frac{73}{182})^n$.

2) Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $P(D_n) \geq 0,99$.

EXERCICE N : 3 (4.5 points)

L'espace (ξ) est rapporté à un repère orthonormé (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) .

Soient m un paramètre réel et S_m l'ensemble des points $M (x , y , z)$ de (ξ) tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4(m-1)x + 2(m-1)y - 2(m-1)z = 0$$

1) a) Montrer que pour tout $m \neq 1$, S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m et de rayon R_m

b) Déterminer l'ensemble des points I_m quand m varie dans $IR \setminus \{ 1 \}$.

2) Soit le plan $P : 2x - y + z = 0$. Montrer que P est tangent à S_m pour tout $m \neq 1$.

3) S_2 recoupe les axes , (O , $\vec{i}$) , (O , $\vec{j}$) et (O , $\vec{k}$) respectivement en A , B et C distincts de O .

a) Montrer que les coordonnées de A sont (4 , 0 , 0) et trouver celles de B et C .

b) Montrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne : $x - 2y + 2z - 4 = 0$.

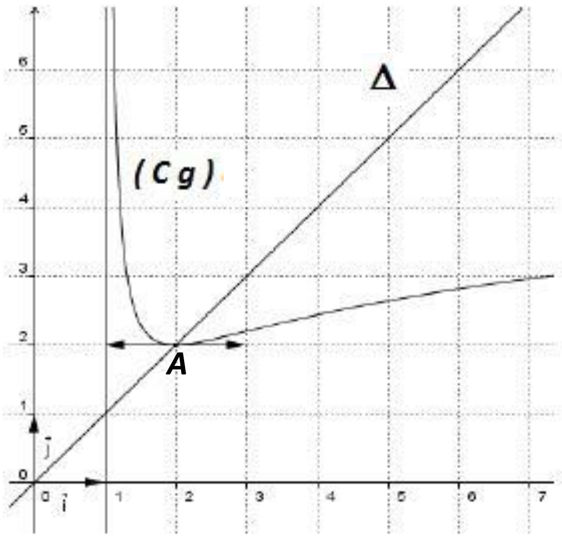
c) Déterminer le rayon r du cercle circonscrit au triangle ABC et déterminer son centre Ω .

EXERCICE N : 4 (7 points)

A) Dans la figure ci-contre on a représenté la courbe (C_g) de la fonction g définie sur $] 1 ; +\infty [$,

par : $g(x) = \dfrac{ax}{x-1} + b \ln(x-1)$ et la droite $\Delta : y = x$.

L'unique tangente horizontale à (C_g) est au point $A (2 , 2)$



1) Dresser le tableau de variations de g .

2) En se servant des valeurs de $g(2)$ et $g'(2)$ prouver que : $\boldsymbol{a = b = 1}$

3) Montrer que $\displaystyle\int_2^{1+e} \frac{x}{x-1}\, dx = e$.

B) Soit la fonction f définie sur $] 1 ; +\infty [$ par : $f(x) = x \ln(x-1)$.

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $R (O , \vec{u} , \vec{v})$.

1) a) Montrer que pour tout $x \in] 1 , +\infty [$; $f'(x) = g(x)$.

b) Dresser le tableau de variations de f sur $] 1 ; +\infty [$.

2) On considère la suite (I_n) définie sur IN^* par : $I_n = \displaystyle\int_2^{e} x^n \ln(x-1)\, dx$.

a) Interpréter géométriquement le terme I_1 .

b) Vérifier que pour tout réel x distinct de 1 on a : $\dfrac{x^2}{x-1} = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$.

c) En utilisant une intégration par parties , déterminer la valeur de I_1 .

3) a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$; $0 \leq I_n \leq \dfrac{e^{n+1}}{n+1}$.

b) Déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{I_n}{e^n} \right)$.