***Prof:Oueslati Aymen***

## ***Etude des fonction***

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\ln(1+\tan x)$ et soit $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{4}\right)^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)=+\infty$.

b) Calculer $f'(x)$ pour $x$ appartenant à $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Vérifier que les points O, $A\left(\frac{\pi}{4},\ln 2\right)$ et $I\left(\frac{\pi}{8},\frac{\ln 2}{2}\right)$ sont des points de $(C)$.

(On donne $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1$).

b) Montrer que $f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\ln 2-f(x)$ pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$.

(On rappelle que $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$ )

c) Justifier alors que le point I est un centre de symétrie de la courbe $(C)$.

Dans l'annexe ci-jointe, on a placé les points I et A dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

3) Tracer la courbe $(C)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ en précisant sa tangente au point O.

4) On désigne par $S_1$ la partie du plan limitée par la courbe $(C)$, la droite (OA) et les droites d'équations $x=0$ et $x=\frac{\pi}{8}$ et on désigne par $S_2$ la partie du plan limitée par la courbe $(C)$, la droite (OA) et les droites d'équations $x=\frac{\pi}{8}$ et $x=\frac{\pi}{4}$.

a) Justifier que les surfaces $S_1$ et $S_2$ ont la même aire.

b) Calculer alors $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$.

5) a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera. On note $f^{-1}$ la réciproque de f.

b)Justifier que $f^{-1}$ est dérivable sur J et donner l'expression de $(f^{-1})'(x)$ pour x appartenant à J.

c) Donner la valeur de $\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{1+(e^x-1)^2}dx$.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1 + x^2)$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

**I.** 1) Montrer que pour tout x appartenant à $[0,+\infty[$ $\quad f'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{1+x^2}$.

2) a) Montrer que pour $x > 0$, $f(x) = x - 2\ln x - \ln(1 + \dfrac{1}{x^2})$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x]$, puis interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) a) Donner une équation de la tangente $\Delta$ à la courbe (C) au point O.

b) Donner la position relative de la droite $\Delta$ et la courbe (C).

c) Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite $\Delta$ et la courbe (C).

**II.** Soit G la fonction définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $G(x) = \displaystyle\int_0^{\tan x} \dfrac{dt}{1+t^2}\,dt$.

1) a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et déterminer sa fonction dérivée.

b) En déduire que pour tout x appartenant à $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ $G(x) = x$.

c) Calculer alors $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{1+t^2}dt$.

2) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite $\Delta$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 \ln(1+x^2)dx = \ln 2 - 2 + 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

b) En déduire la valeur de $\mathcal{A}$.