Lycée Secondaire El Ksour	Etude de la Fonction Ln	Prof Bouzouraa Chaouki
Année Scolaire 2015-2016	MATHÉMATIQUES	4 Sc I

Exercice N°1

Partie A: On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x+1) - x$ et $g(x) = \ln(x+1) - x + \dfrac{x^2}{2}$.

1. Étudier les variations des fonctions f et g sur $[0; +\infty[$.

2. En déduire que pour tout réel $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(x+1) \leqslant x$.

Partie B: On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et $u_{n+1} = u_n\left(1+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$.

1. Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $\ln(u_n) = \ln\left(1+\dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right) + \ldots + \ln\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

3. On pose $S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}$ et $T_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{4^3} + \ldots + \dfrac{1}{4^n}$.

A l'aide de la partie A, montrer que $S_n - \dfrac{1}{2}T_n \leqslant \ln(u_n) \leqslant S_n$.

4. Calculer S_n et T_n en fonction de n.

5. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

Partie D: 1. Déduire de la partie A que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} \leqslant \ln(1+\dfrac{1}{n}) \leqslant \dfrac{1}{n}$.

2. On considère les suites (v_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n}\dfrac{1}{k} - \ln(n)$ et $w_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n}\dfrac{1}{k} - \ln(n+1)$.

a) Montrer que (v_n) est décroissante.

b) Montrer que (w_n) est croissante.

c) Montrer que (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

3. Trouver une valeur approchée de leur limite commune à 10^{-3} près.

Exercice N°2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1 ; +\infty[$ par : $f(x) = x - \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-1; +\infty[$.

2. Pour tout x de l'intervalle $]-1; +\infty[$, on pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$.

a) Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $]-1 ; +\infty[$.

b) Calculer N(0). En déduire les variations de f.

3. a) Montrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe C.

b) Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe C et de la droite D.

4. Soit F la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $F(x) = [\ln(1+x)]^2$.

a. Justifier la dérivabilité sur $[0; +\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x, $F'(x)$.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^3 f(x)dx$.

Exercice N°3

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x\ln(x+1)$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. a) Montrer que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

b) L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe C au point O ? Justifier.

2. On pose $I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx$.

a. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout réel $x \neq -1$, $\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$.

b. Calculer I.

3. A l'aide d'une intégration par parties et du résultat de la question 2, calculer, en unités d'aires, l'aire A du domaine plan délimité par la courbe C, les droites d'équation $x = 0$, $x = 1$ et l'axe des abscisses.

Exercice N°4

1. Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^3 - x - 2\ln(x) + 1$.

a) Montrer que la fonction g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et que pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$.

b) Etudier les variations de la fonction g puis déterminer le signe de $g(x)$.

2. On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x^2}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé .

a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b) Montrer que pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$, puis donner le tableau de variations de f.

c) Vérifier que la droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à C_f .

3. On considère la fonction h définie sur $]0 ; +\infty[$ par $h(x) = x + \ln(x)$.

a) Etudier le sens de variations de h et montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0 ; +\infty[$.

b) Donner une valeur approchée de α à 0,1 près.

c) Utiliser les résultats de 3.a) pour déterminer les positions relatives de (d) et C_f .

Exercice N°5

PARTIE A : On considère la fonction g définie sur $]\,0 ; +\infty\,[$ par $g(x) = x^2 - \ln x$.

1. Etudier les variations de g (on ne demande pas les limites aux bornes de son ensemble de définition).
2. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]\,0 ; +\infty\,[$.

PARTIE B : On considère la fonction f définie sur $]\,0 ; +\infty\,[$ par $f(x) = \frac{1+\ln x}{x} + x$.

1. Etudier les variations de la fonction f en utilisant la partie A.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe C représentative de f.
4. Préciser la position de C par rapport à (d) sur $]\,0 ; +\infty\,[$.
5. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 1.
6. Montrer que, pour $x \geq \frac{1}{e}$, la courbe C est située entre les droites (d) et T.

PARTIE C : On considère les quatre réels a_1, a_2, a_3, a_4 définis par :

a_1 est l'abscisse du point d'intersection de C et de (d) ;

a_2 est l'abscisse du point de C en lequel la tangente passe par l'origine du repère ;

a_3 est l'abscisse du point d'intersection de C et de T ;

a_4 est solution de l'équation $f''(x) = 0$, où f'' désigne la dérivée seconde de la fonction f.

1. Déterminer les réels a_1, a_2, a_3, a_4 .
2. Montrer que ces réels sont des termes consécutifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison.

Exercice N°6

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2\ln(x) - (\ln x)^2$

1) Etudier les limites de f en $+\infty$ et en 0. Déterminer les asymptotes éventuelles de $\mathcal{C}_f$.
2) Calculer f' et dresser le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.
3) Préciser les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
4) Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse e^2.
5) On note D_k la droite d'équation $y = k$ avec $k < 1$. Montrer que pour tout réel $k < 1$, la droite D_k coupe $\mathcal{C}_f$ en deux points d'abscisses respectives m et m'.
6) Montrer que $mm' = e^2$ pour tout réel $k < 1$.

Exercice N°7

Soit la fonction définie sur l'intervalle I =]4 ;+∞ [par : $f(x) = -2x + 5 + 3\ln\dfrac{x+1}{x-4}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, unité graphique : 1 cm.

1. Étude de f

a. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de I.

b. Montrer que sur I, $f'(x)$ est strictement négatif et dresser le tableau de variation de f.

c. Montrer que la droite (D) d'équation $y = -2x + 5$ est une asymptote à (C). Préciser la position de (C) par rapport à (D).

2. Tracer la courbe (C) et la droite (D) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

3. Déterminer les coordonnées du point de (C) où la tangente Δ a un coefficient directeur égal à $-\dfrac{9}{2}$.

Donner une équation de Δ et la tracer dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

4. Calcul d'aire

a. Déterminer, à l'aide d'une intégration par parties, les primitives sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \ln x$.

b. Montrer que la fonction $G : x \to (x+1)\ln(x+1) - x$ est une primitive de la fonction $g : x \mapsto \ln(x+1)$ sur I.

c. Montrer que la fonction $H : x \to (x-4)\ln(x-4) - x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto \ln(x-4)$ sur I.

d. Déduire des questions précédentes le calcul de l'aire A du domaine plan délimité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 5$ et $x = 6$.

On donnera la valeur exacte de A puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

5. Intersection de (C) et de l'axe des abscisses

a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans I une unique solution, notée x_0.

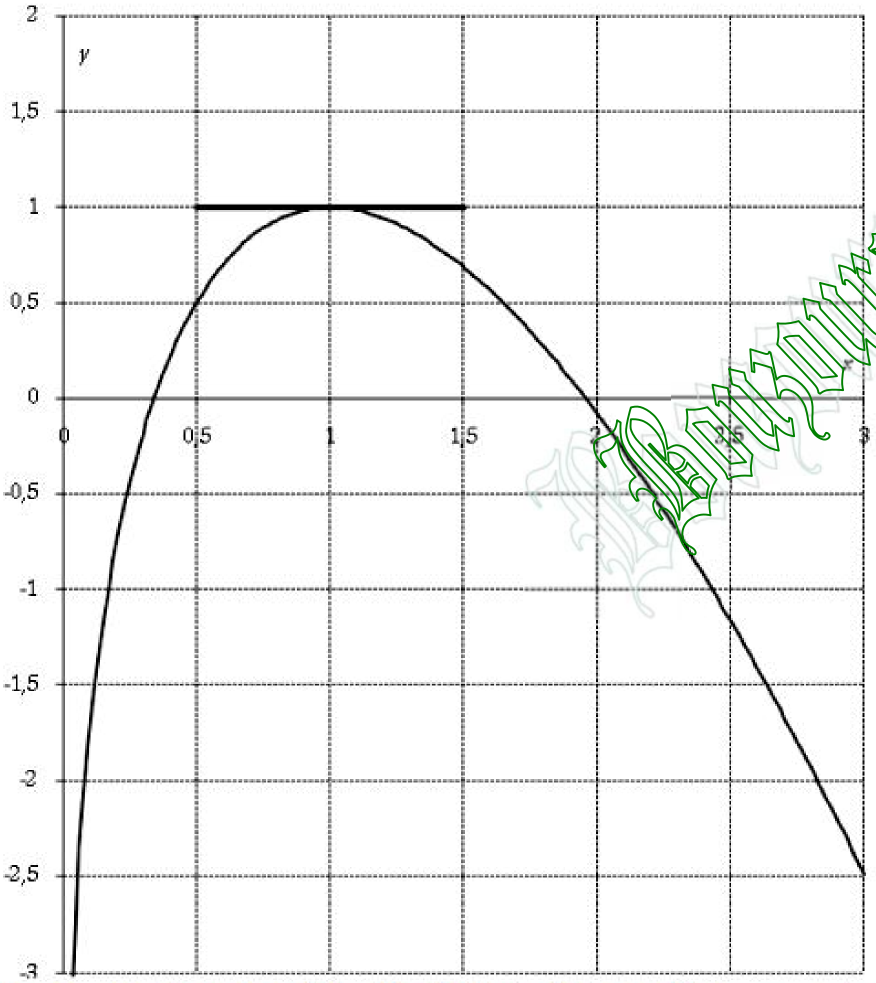
b. Déterminer graphiquement un encadrement de x_0 d'amplitude 0,5.

c. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de x_0 d'amplitude 10^{-2}. On explicitera la méthode employée.

Exercice N°8

Partie A

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=ax+(bx+c)\ln x$ avec a, b et c des réels. La courbe (C) de f est donnée ci-dessous.



En utilisant ce graphique et en sachant que $f(2)=2-3\ln 2$, justifier que l'on a $a=c=1$ et $b=-2$.

Partie B

On considère alors la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x)=x+(1-2x)\ln x$.

1. a. Déterminer la limite de g en 0.

b. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. a. Déterminer la fonction dérivée de g.

b. Etudier, pour x dans $]0\,;+\infty[$, le signe de $-2\ln x$ et celui de $\dfrac{1-x}{x}$. En déduire le signe de $g'(x)$ et les variations de g.

3. Dresser le tableau complet des variations de g.

4. Soit la droite Δ d'équation $y=x$.

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(1-2x)\ln x=0$ et donner une interprétation graphique des solutions.

b. Etudier la position de la courbe représentative de g par rapport à Δ.