Prof:Oueslati Aymen ***serie de revision***

****Aritmetique,proba,espace****

Exercice 1 :

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

"Il existe un seul couple $(a\,;b)$ de nombres entiers naturels, tel que :
$a < b \quad ; \quad PPCM(a\,;\,b) - PGCD(a\,;\,b) = 1$"

Exercice 2 :

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

"On considère l'équation :
$(E)\,:\; x^2 - 52x + 480 = 0$
où x est un entier naturel.
Il existe deux entiers naturels non nuls dont le $PGCD$ et le $PPCM$ sont solutions de l'équation (E)."

Exercice 3 :

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier $4^n - 1$, lorsque n est un entier naturel.

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : "*Si p est un nombre entier premier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$*"

Partie A. Quelques exemples.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, 4^n est congru à 1 modulo 3.

2. Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que $4^{28} - 1$ est divisible par 29.

3. Pour $1 \leqslant n \leqslant 4$, déterminer le reste de la division de 4^n par 17. En déduire que, pour tout entier k, le nombre $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.

4. Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5 ?

5. A l'aide des questions précédentes, déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

Partie B. Divisibilité par un nombre premier

Soit p un nombre premier différent de 2.

1. Démontrer qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que :
$4^n \equiv 1 \pmod{p}$.

2. Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel tel que $4^n \equiv 1 \pmod{p}$. On note b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b \equiv 1 \pmod{p}$ et r le reste de la division euclidienne de n par b :

- **a.** Démontrer que $4^r \equiv 1 \pmod{p}$. En déduire que $r = 0$.
- **b.** Prouver l'équivalence : $4^n - 1$ est divisible par p si, et seulement si, n est multiple de b.
- **c.** En déduire que b divise $p - 1$.

www.devoirat.net 2016

Oueslati Aymen:27677722

Exercice 4 :

1. On considère l'équation (E) :

$$109x - 226y = 1$$

où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer le *pgcd* de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?

b. Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme $(141 + 226k\,;68 + 109k)$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.
En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que $109d = 1 + 226e$.
(On précisera les valeurs des entiers d et e)

2. Démontrer que 227 est un nombre premier.

Exercice 4 :

Une usine produit des sacs. Chaque sac fabriqué peut présenter deux défauts : le défaut a et le défaut b. Un sac est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1. Dans cette question les probabilités demandées seront données avec leurs valeurs décimales exactes.
On prélève un sac au hasard dans la production d'une journée.
On note A l' évènement « le sac présente le défaut a » et B l'évènement « le sac présente le défaut b ». Les probabilités des évènements A et B sont respectivement $P(A) = 0{,}02$ et $P(B) = 0{,}01$; on suppose que ces deux évènements sont indépendants.

a. Calculer la probabilité de l'évènement C « le sac prélevé présente le défaut a et le défaut b ».

b. Calculer la probabilité de l'évènement D « le sac est défectueux ».

c. Calculer la probabilité de l'évènement E « le sac ne présente aucun défaut ».

d. Sachant que le sac présente le défaut a, quelle est la probabilité qu'il présente aussi le défaut b ?

2. On suppose que la probabilité (arrondie au centième) qu'un sac soit défectueux est égale à 0,03.
On prélève au hasard un échantillon de 100 sacs dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 sacs. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 sacs, associe le nombre de sacs défectueux.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Quelle est la probabilité de l'évènement « au moins un sac est défectueux » ? On arrondira cette probabilité au centième. Interpréter ce résultat.

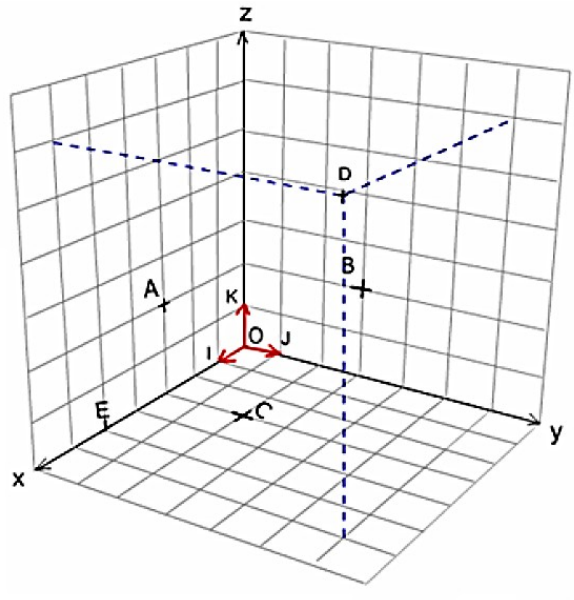
c. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

www.devoirat.net 2016

Exercice 5 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{Ok})$.

Dans la figure ci-contre ABCD est un tétraèdre tel que $\overrightarrow{OD}=6\overrightarrow{OI}+6\overrightarrow{OJ}+6\overrightarrow{OK}$



1. a. Préciser les coordonnées de chacun des points A, B, C et E.

b. Vérifier que $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OD}$.

c. En déduire l'aire du triangle ABC.

d. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

2. a. Donner une équation cartésienne du plan P = (ABC) puis vérifier que le point E appartient à P.

b. Soit S l'ensemble des points M(x ,y, z) tels que : $x^2+y^2+z^2-2x-8y-6z+23=0$.

Montrer que S est une sphère dont on précisera le rayon et les coordonnées de son centre.

c. Montrer que S et P sont tangents en B.

3. Soit f l'application de l'espace dans lui-même qui à tout point M(x, y, z) associe le point M(x', y', z') tel que : $x'=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$, $y'=\frac{1}{2}y$ et $z'=\frac{1}{2}z$.

a. Montrer que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

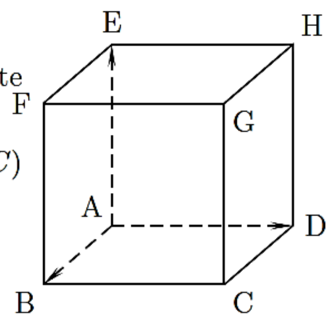
b. Montrer que f(S) et P sont tangents en un point dont on précisera les coordonnées.

Exercice 6 :

L'espace est orienté dans le sens direct. ABCDEFGH est un cube d'arête 1 et J est le milieu de [AB].

Le plan $\mathscr{P}$ passant par J et parallèle au plan (ACF) coupe la droite (BC) en K.

Soit h l'homothétie de centre B et qui transforme A en J.



1. Déterminer le rapport de h.
2. (a) Déterminer l'image par h du plan (ACF).

   (b) Déduire que h(C)=K.

3. On muni l'espace du repère orthonormé direct $\left(A,\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

   (a) Calculer $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AF}$ puis déduire qu'une équation cartésienne du plan (ACF) est $x-y-z=0$.

   (b) Calculer le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre ACFH.

   (c) En déduire le volume $\mathcal{V}'$ du tétraèdre image du tétraèdre ACFH par l'homothétie h.

4. Soit (S) la sphère de centre B et passant par D. Montrer que le plan (ACF) coupe (S) suivant un cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre ω et le rayon r.

www.devoirat.net 2016

Oueslati Aymen:27677722

www.devoirat.net 2016