## Exercice 1

Une urne A contient quatre boules rouges et six boules noires. Une urne B contient une boule rouge et neuf boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher.

**Partie A**

Un joueur dispose d'un dé à six faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. Il le lance une fois : s'il obtient 1, il tire au hasard une boule de l'urne A, sinon il tire au hasard une boule de l'urne B.

1. Soit R l'événement « le joueur obtient une boule rouge ». Montrer que $p(\mathrm{R}) = 0{,}15$.

2. Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A est-elle supérieure ou égale à la probabilité qu'elle provienne de B ?

**Partie B**

Le joueur répète deux fois l'épreuve décrite dans la partie A, dans des conditions identiques et indépendantes (c'est-à-dire qu'à l'issue de la première épreuve, les urnes retrouvent leur composition initiale).
Soit $x$ un entier naturel non nul.

Lors de chacune des deux épreuves, le joueur gagne $x$ euros s'il obtient une boule rouge et perd deux euros s'il obtient une boule noire.

On désigne par $G$ la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur en euros au terme des deux épreuves. La variable aléatoire $G$ prend donc les valeurs $2x$, $x-1$ et $-4$.

1. Déterminer la loi de probabilité de $G$.

2. Exprimer l'espérance $\mathrm{E}(G)$ de la variable aléatoire $G$ en fonction de $x$.

3. Pour quelles valeurs de $x$ a-t-on $\mathrm{E}(G) > 0$ ?

## Exercice 2

Une maladie atteint 3% d'une population donnée. Un test de dépistage donne les résultats suivants :

Chez les individus malades, 95% des tests sont positifs et 5% négatifs.

Chez les individus non malades, 1% des tests sont positifs et 99% négatifs.

On choisit un individu au hasard.

1. Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.

2. Quelle est la probabilité

a. qu'il soit malade et qu'il ait un test positif ?

b. qu'il ne soit pas malade et qu'il ait un test négatif ?

c. qu'il ait un test positif ?

d. qu'il ait un test négatif ?

3. Calculer la probabilité

a. qu'il ne soit pas malade, sachant que le test est positif ?

b. qu'il soit malade, sachant que le test est négatif ?

## Exercice 3

Un lot de tulipes a un pouvoir germinatif de 80% ; cela signifie que l'on considère que chaque bulbe a une probabilité égale à $\frac{4}{5}$ de produire une fleur et cela indépendamment des autres bulbes.

Chaque bulbe contient l'un des trois gènes R (rouge), B (blanc) et J (jaune) qui détermine la couleur de la future fleur éventuelle.

On suppose que la probabilité pour qu'un bulbe possède le gène R est $\frac{1}{2}$, la probabilité pour qu'un bulbe possède le gène B est $\frac{1}{10}$

1. a. Tracer un arbre pondéré traçant la floraison d'un bulbe.

b. Quelle est la probabilité pour qu'un bulbe planté produise une fleur rouge ?

c. Quelle est la probabilité pour qu'un bulbe planté produise une fleur blanche ?

2. On appelle X la variable aléatoire qui associe le nombre k de fleurs rouges obtenues après avoir planté 5 bulbes.

a. Démontrer qu'il s'agit d'un schéma de Bernouilli dont on donnera les éléments caractéristiques.

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer E(X).

3. Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 1.

On désigne par $p_n$ la probabilité de n'obtenir aucune tulipe blanche après avoir planté $n$ bulbes.

Calculer $p_n$.

4. Combien de bulbes doit-on planter, au minimum, pour obtenir au moins une tulipe blanche, avec une probabilité supérieure ou égale à $\frac{19}{20}$ ?

## Exercice 4

Vie et mort de bactéries,

Soit $t$ un entier positif. À l'instant $t$ une bactérie vit dans un milieu de culture. À l'instant suivant, $t+1$, cette bactérie peut

* mourir avec une probabilité $\frac{1}{4}$,
* continuer à vivre avec une probabilité $\frac{1}{4}$,
* se diviser en deux bactéries identiques avec une probabilité $\frac{1}{2}$.

Partie A

On suppose dans cette partie, qu'à l'instant $t$, il y a deux bactéries $b_1$ et $b_2$ dans le milieu de culture, chacune se comportant de la même façon, décrite dans le préambule, et indépendamment l'une de l'autre.

On appelle $X$ le nombre total de bactéries à l'instant suivant $t+1$.

1. Compléter le tableau donné, à l'aide du nombre $n$ de bactéries restantes à l'instant $t+1$ et de la probabilité $p$ de l'événement correspondant.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ = nombre de bactéries à $t+1$ | | | | | |
| $p$ = probabilité qu'il y ait $n$ bactéries à $t+1$ | | | | | |

2. Quelles sont les valeurs possibles prises par $X$ ¿

3. a. Décrire, à l'aide d'une phrase, l'événement { $X = 2$ }.

b. Justifier que la probabilité de l'événement { $X = 2$ } est égale à $P(X=2)=\dfrac{5}{16}$.

Partie B

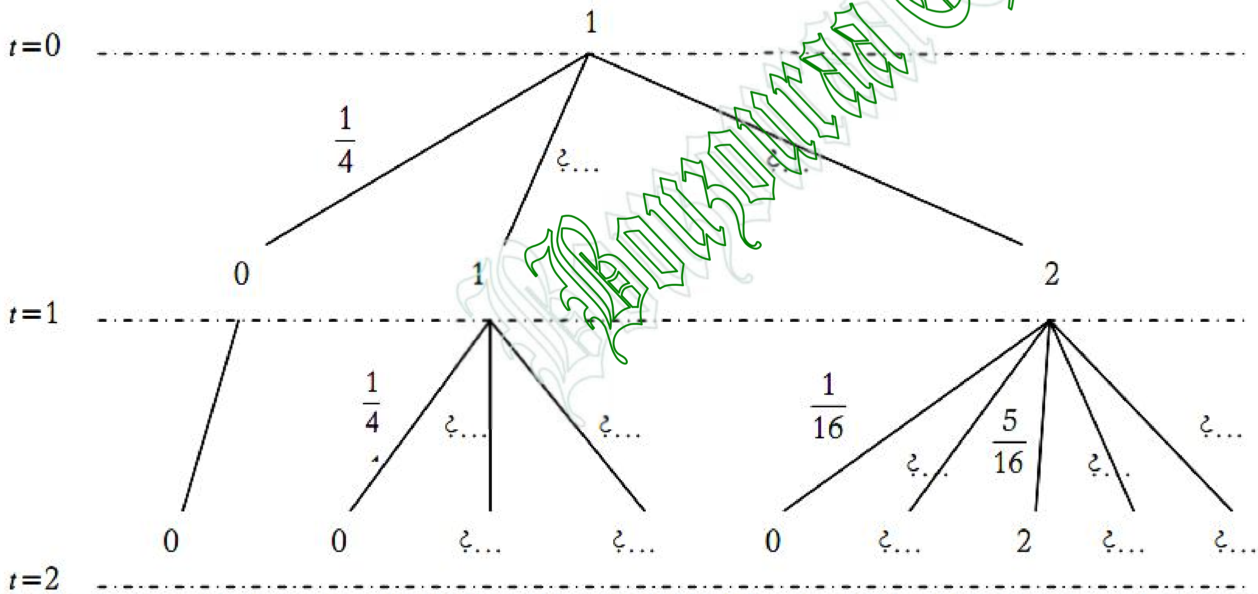
On suppose dans cette partie qu'à l'instant 0 il y a une seule bactérie dans le milieu de culture, qui se comporte comme décrit dans le préambule.

Ensuite, si à l'instant 1 il y a des bactéries, elles se comportent à l'instant suivant comme la bactérie initiale et ceci indépendamment les unes des autres.

Si à un instant il n'y a plus de bactérie le processus d'évolution s'arrête.

On se propose d'étudier le nombre de bactéries à l'instant 2.

1. Compléter l'arbre donnant toutes les possibilités pour le nombre de bactéries aux instants 1 et 2. Donner sur chaque branche de l'arbre la probabilité correspondante.




2. On désigne par $A_1$, l'événement « *à l'instant 1 il y a une bactérie* » et par $B_2$ l'événement « *à l'instant 2 il y a deux bactéries* ».

a. Donner la probabilité $P_{A_1}(B_2)$ qu'il y ait deux bactéries à l'instant 2 sachant qu'il y avait une bactérie à l'instant 1.

b. Calculer la probabilité $P(A_1 \cap B_2)$ qu'il y ait une bactérie à l'instant 1 et deux bactéries à l'instant 2.

3. On désigne par $A_2$ l'événement « *à l'instant 1 il y a deux bactéries* ».

a. Donner la probabilité $P_{A_2}(B_2)$ qu'il y ait deux bactéries à l'instant 2 sachant qu'il y avait deux bactéries à l'instant 1.

b. Calculer la probabilité $P(A_2 \cap B_2)$ qu'il y ait deux bactéries à l'instant 1 et deux bactéries à l'instant 2.

4. Soit $Y$ la variable aléatoire représentant le nombre de bactéries à l'instant 2.

a. Quelles sont les valeurs que peut prendre $Y$ ¿

b. Calculer la probabilité de l'événement { $Y = 2$ } .

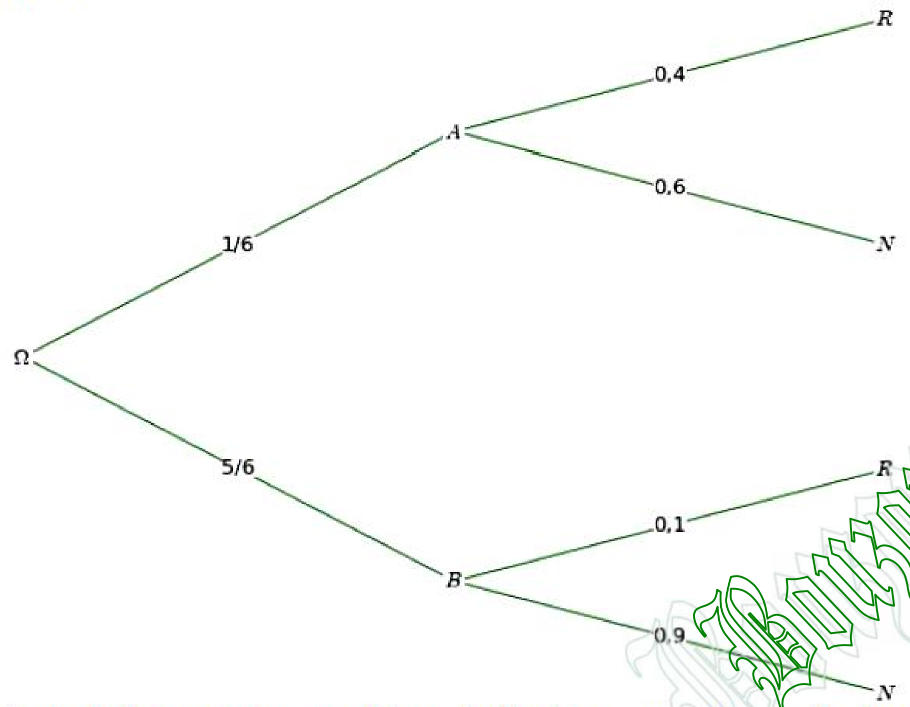
c. Calculer la probabilité de l'événement { $Y = 0$ } .

d. Faire un tableau donnant la loi de probabilité de $Y$.

e. Calculer l'espérance $E(Y)$ de $Y$.

<u>**Correction**</u>
<u>**Exercice 1**</u>

**Partie A**




1. $A$ et $B$ forment une partition de l'univers $\Omega$ ; d'après la formule des probabilités totales, on a $p(R)=p(A\cap R)+p(B\cap R)=p_A(R)\times p(A)+p_B(R)\times p(B)=\frac{1}{6}\times\frac{4}{10}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{10}=\frac{9}{60}$.

Par conséquent, $p(R)=0{,}15$.

2. Calculons $p_R(A)$ et $p_R(B)$ : $p_R(A)=\frac{p(A\cap R)}{p(R)}=\frac{\frac{4}{60}}{\frac{9}{60}}=\frac{4}{9}$ et $p_R(B)=\frac{p(B\cap R)}{p(R)}=\frac{\frac{5}{60}}{\frac{9}{60}}=\frac{5}{9}$. Donc, si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de $A$ est inférieure à celle qu'elle provienne de $B$.

**Partie B**

L'épreuve décrite dans la partie A est une épreuve de Bernoulli dont le succès est « obtenir une boule rouge ». On a $p=0{,}15$ et $n=2$ : $p(X=k)=\binom{2}{k}(0{,}15)^k(1-0{,}15)^{2-k}$.

1. $p(G=2x)=p(X=2)=\binom{2}{2}(0{,}15)^2=0{,}0225$ ;

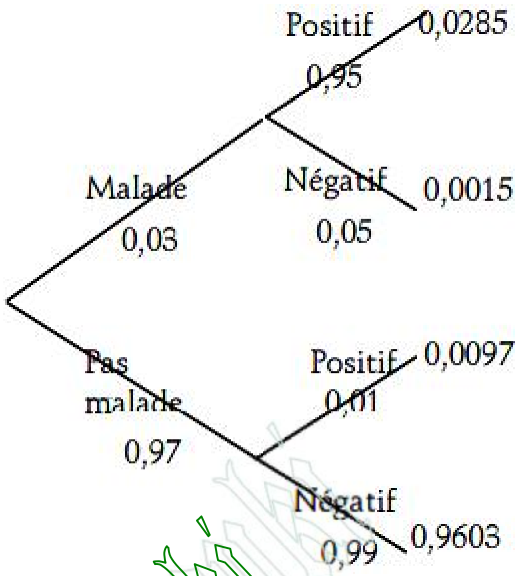
$p(G=x-2)=p(X=1)=\binom{2}{1}(0{,}15)^1(0{,}85)^1=0{,}255$ ;

$p(G=-4)=p(X=0)=\binom{2}{0}(0{,}85)^2=0{,}7225$.

2. $E(G)=0{,}0225\times(2x)+0{,}255\times(x-2)+0{,}7225\times(-4)=0{,}3x-3{,}4$.

3. $E(G)\geq 0 \Leftrightarrow 0{,}3x-3{,}4\geq 0 \Leftrightarrow 0{,}3x\geq 3{,}4 \Leftrightarrow x\geq\frac{3{,}4}{0{,}3}\Leftrightarrow x\geq 11{,}33$. Or $x$ est un entier naturel, donc $E(G)\geq 0$ lorsque $x$ est supérieur ou égal à 12.

## Exercice 2




1. Voir ci-contre.

2. On note $M$ l'individu est malade et $T$ le test est positif :

a. $P(M\cap T)=P(M)\times P_M(T)=0,03\times 0,95=0,0285$.

b. $P(\bar{M}\cap\bar{T})=P(\bar{M})\times P_{\bar{M}}(\bar{T})=0,97\times 0,99=0,9603$.

c. $P(T)=P(\bar{M}\cap T)+P(M\cap T)=0,0097+0,0285=0,0382$.

d. $P(\bar{T})=P(\bar{M}\cap\bar{T})+P(M\cap\bar{T})=0,0015+0,9603=0,9618$.

3. a. $P_T(\bar{M})=\dfrac{P(T\cap\bar{M})}{P(T)}=\dfrac{0,0097}{0,0382}\approx 0,25$ : c'est énorme…

b. $P_{\bar{T}}(M)=\dfrac{P(\bar{T}\cap M)}{P(\bar{T})}=\dfrac{0,0015}{0,9618}\approx 0,00155$ : ouf… on a très peu de chances d'être malade sachant que le test est négatif, c'est rassurant.

## Exercice 3

b. $p(F\cap R)=p(F)\times p_F(R)=0,8\times 0,5=0,4$.

c. $p(F\cap B)=p(F)\times p_F(B)=0,8\times 0,1=0,08$.

2.a. * Le succès est obtenir une fleur Rouge, il y a $n=5$ épreuves, il y a $k$ succès : $p=p(F\cap R)=0,4$.

b.

$p(X=0)=\binom{5}{0}(0,4)^0\times(0,6)^5=0,07776$, $p(X=1)=\binom{5}{1}(0,4)^1\times(0,6)^4=0,2592$,

$p(X=2)=\binom{5}{2}(0,4)^2\times(0,6)^3=0,3456$, $p(X=3)=\binom{5}{3}(0,4)^3\times(0,6)^2=0,2304$,

$p(X=4)=\binom{5}{4}(0,4)^4\times(0,6)^1=0,0768$, $p(X=5)=\binom{5}{5}(0,4)^5\times(0,6)^0=0,01024$.

| $X=x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(X=x_i)$ | 0,0776 | 0,2592 | 0,3456 | 0,2304 | 0,0768 | 0,01024 |
| $p_i\times x_i$ | 0 | 0,2592 | 0,6912 | 0,6912 | 0,3072 | 0,0512 |

$E(X)=\sum_{i=1}^{5}p_i\times x_i=2$.

3. On a répété $n$ fois l'expérience, et on n'a obtenu aucune fleur blanche : $p_n(X=0)=\binom{n}{0}(0,08)^0\times(0,92)^n$.

4. Le contraire de "au moins une fleur blanche" est "aucune fleur blanche" : cette probabilité est donc $p=1-p_n=1-0,92^n$. Il faut donc que

$$1-0,92^n\geq\frac{19}{20}\Leftrightarrow 0,92^n\leq 1-\frac{19}{20}\Leftrightarrow 0,92^n\leq\frac{1}{20}\Leftrightarrow \ln 0,92^n\leq\ln\frac{1}{20}\Leftrightarrow n\ln 0,92\leq-\ln 20\Leftrightarrow n\geq\frac{-\ln 20}{\ln 0,92}\approx 35,9.$$

On doit donc planter au minimum 36 fleurs pour avoir une probabilité supérieure à 19/20 d'obtenir une fleur Blanche.

## Exercice 4

Résumons les probabilités données dans l'énoncé :

| état | meurt | vit | division |
|---|---|---|---|
| $p$ | 1/4 | 1/4 | 1/2 |

Partie A

1. Complétons le tableau suivant :

| $t+1$ | $b_1$ vit | $b_1$ meurt | $b_1$ se divise | total |
|---|---|---|---|---|
| $b_2$ vit | $\frac{1}{4}.\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}.\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{2}.\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ |
| $b_2$ meurt | $\frac{1}{4}.\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}.\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{2}.\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ |
| $b_2$ se divise | $\frac{1}{2}.\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{2}.\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |
| total | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 |

Qui nous permet simplement de compléter celui demandé : il y aura donc les probabilités suivantes :

0 bactéries si les deux meurent : $\frac{1}{16}$ ;

1 bactérie si $b_1$ meurt et $b_2$ vit ou le contraire : $\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{8}$

2 bactéries si $b_1$ vit et $b_2$ vit ou $b_1$ se divise et $b_2$ meurt ou le contraire : $\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{5}{16}$ ;

3 bactéries si $b_1$ vit et $b_2$ se divise ou le contraire : $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$ ;

4 bactéries si $b_1$ se divise et $b_2$ se divise : $\frac{1}{4}$.

| $n$=nombre de bactéries à $t+1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$=probabilité qu'il y ait $n$ bactéries à $t+1$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{5}{16}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 |

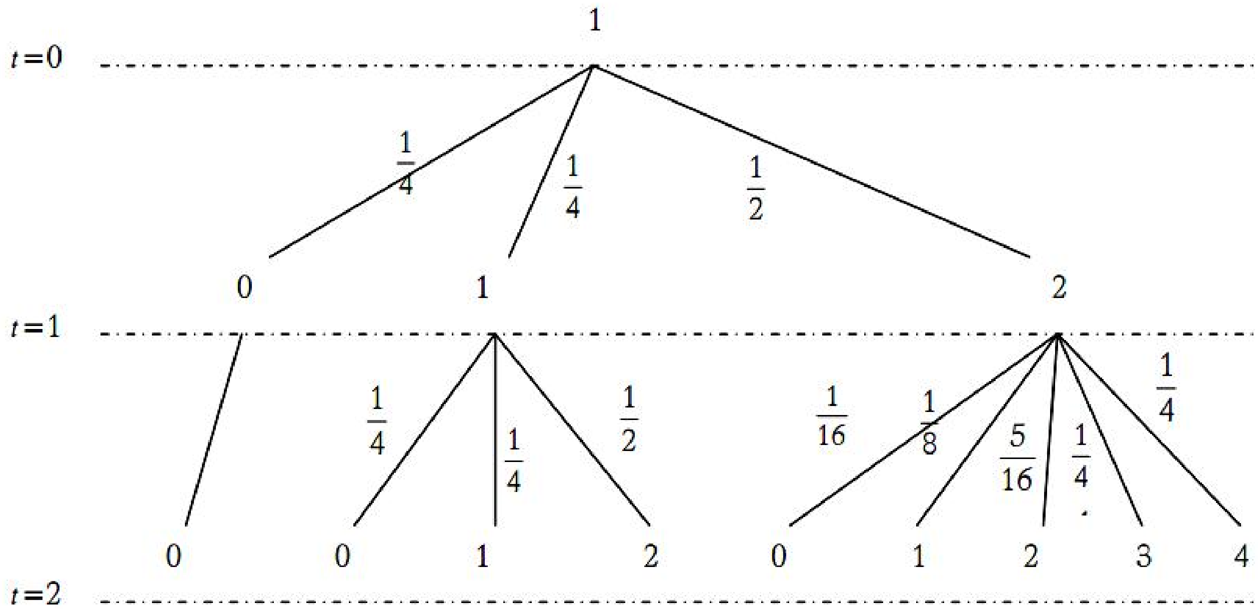
2. $X$ peut donc prendre les valeurs 0, 1, 2, 3 ou 4.

3. a. L'événement $\{X = 2\}$ signifie qu'il y a deux bactérie à l'instant $t+1$.

b. $P\{X = 2\}$ = probabilité que $b_1$ vit et $b_2$ vit ou $b_1$ se divise et $b_2$ meurt ou le contraire $=\frac{1}{4}.\frac{1}{4}+\frac{1}{2}.\frac{1}{4}+\frac{1}{4}.\frac{1}{2}=\frac{1+2+2}{16}=\frac{5}{16}$.

Partie B

1. Pratiquement toutes les réponses de l'arbre sont connues puisque s'il y a 1 bactérie à l'instant 1 on es dans la situation de l'énoncé et s'il y en a 2 on est dans la situation de la partie A :



2. a. $P_{A_1}(B_2)$ est la probabilité qu'il y ait 2 bactéries à l'instant 2 sachant qu'il y en a 1 à l'instant 1 : on est sur la branche 1-1-2 de l'arbre mais on ne s'intéresse qu'à ce qui se passe entre $t=1$ et $t=2$ : $P_{A_1}(B_2)=\frac{1}{2}$.

b. $P(A_1 \cap B_2)=P_{A_1}(B_2)\times P(A_1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$ ; en fait on multiplie les probabilités de chaque bout de branche de l'arbre.

3. a. $P_{A_2}(B_2)$ = probabilité de la branche 1-2-2 limitée au deuxième segment = $\frac{5}{16}$.

b. $P(A_2 \cap B_2)=P_{A_2}(B_2)\times P(A_2)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{16}=\frac{5}{32}$.

4. a. $Y$ peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3 ou 4 comme $X$.

b. $P(\{\ Y=2\ \})=P(A_1 \cap B_2)+P(A_2 \cap B_2)=\frac{1}{8}+\frac{5}{32}=\frac{9}{32}$.

c. $P(\{\ Y=0\ \})=\frac{1}{4}.1+\frac{1}{4}.\frac{1}{4}+\frac{1}{2}.\frac{1}{16}=\frac{11}{32}$.

d. Loi de probabilité de $Y$ :

| $Y$=nombre de bactéries à $t=2$ | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$=probabilité qu'il y ait $Y$ bactéries à $t=2$ | | $\frac{11}{32}$ | $\frac{4}{32}$ | $\frac{9}{32}$ | $\frac{4}{32}$ | $\frac{4}{32}$ | 1 |

e. $E(Y)=0.\frac{11}{32}+1.\frac{4}{32}+2.\frac{9}{32}+3.\frac{4}{32}+4.\frac{4}{32}=\frac{50}{32}=\frac{25}{16}=1,5625$.