EXERCICE 1($6pts$)

1. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{1}{2^n}$

   (a) Calculer u_0 et u_1

   (b) Montrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} v_0 & = 2 \\ v_{n+1} = & \dfrac{1}{2}v_n + \dfrac{1}{2} \end{cases}$

   (a) Calculer v_1

   (b) Montrer que $v_n > 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

   (b) En déduire que la suite (v_n) est convergente.

   (a) Montrer par réccurence que $v_n = 1 + u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

EXERCICE 2 ($7pts$)
Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 1 + 2\ln x$.

1. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

   (b) Montrer que g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

   (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet le nombre 1 comme unique solution sur $]0, +\infty[$.

   (b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \ln x - \dfrac{\ln x}{x^2}$.

   (a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

   (b) Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$, pour tout $x \in]0, +\infty[$.

   (a) Dresser le tableau de variation de f.

   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter ce résultat.

3. Soit C_f et Γ les courbes respectivement des fonctions f et ln dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

   (a) Etudier la position relative de C_f et Γ.

(b) Tracer C_f et Γ.

EXERCICE 3 ($7pts$)

Soit (G) le graphe de sommets A, B, C et D dans cette ordre défini par sa matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. (a) Ce graphe est -il orienté?

   (b) Ce graphe est -il connexe? est-il complet? justifier la réponse.

   (a) Déterminer le degré de chacun de ces sommets.

   (b) En déduire le nombre d'arêtes de (G) .

2. Représenter le graphe (G) associé à la matrice M.

3. On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

   (a) Déterminer le nombre de chaines orientées de longueur 3 reliant D à A.

   (b) Citer ces chemins.