

Equations et inéquations du premier degré

I) Equation du premier degré à une inconnue

1) définitions

Définition 1 :

Une équation à une inconnue est une égalité comprenant un seul nombre inconnu désigné par une lettre.

Exemple :

L'égalité : $3x + 2 = 7x + 1$ est une équation du premier degré à une inconnue.
Le nombre inconnu est désigné par la lettre x

Définition 2 :

**Résoudre une équation dont l'inconnue est le nombre x c'est trouver toutes les valeurs possibles du nombre x qui vérifient l'égalité.
Chaque valeur de x est une solution de cette équation.**

Exemple : Résoudre l'équation $x - 2 = 7$

Comme $9 - 2 = 7$ La valeur de x qui vérifie l'égalité est 9.

L'équation $x - 2 = 7$ a une solution qui est 9

2) Règles : 2

- Si on ajoute ou retranche un même nombre aux deux membres d'une égalité

- Si on multiplie ou divise un même nombre aux deux membres d'une égalité :

On ne change pas les solutions de l'équation

3) Résolutions des équations de base :

Pour tout nombre a et b

a) On peut retrancher le nombre a aux deux membres d'une égalité pour « isoler le nombre x »

Si $x + a = b$ alors $x + a - a = b - a$ donc $x = b - a$

Exemple :

$x + 3 = 9$ alors $x = 9 - 3$ et donc $x = 6$

L'équation $x + 3 = 9$ a une solution qui est 6

b) On peut ajouter le nombre a aux deux membres d'une égalité pour « isoler le nombre x »

Si $x - a = b$ alors $x - a + a = b + a$ donc $x = b + a$

Exemple :

$x - 9 = 7$ alors $x = 7 + 9$ et donc $x = 16$

L'équation $x - 9 = 7$ a une solution qui est 16

c) On peut diviser le nombre a aux deux membres d'une égalité pour « isoler le nombre x »

Si $ax = b$ alors $\frac{a}{a} x = \frac{b}{a}$ donc $x = \frac{b}{a}$

Exemple :

$7x = 14$ alors $x = \frac{14}{7} = 2$ et donc $x = 2$

L'équation $7x = 14$ a une solution qui est 2

d) On peut multiplier le nombre a aux deux membres d'une égalité pour « isoler le nombre x »

Si $\frac{x}{a} = b$ ($a \neq 0$) alors $\frac{x}{a} \times a = b \times a$ donc $x = b \times a$

Exemple :

$\frac{x}{3} = 5$ alors $x = 3 \times 5$ et donc $x = 15$

L'équation $\frac{x}{3} = 5$ a une solution qui est 15

e) On peut multiplier par le nombre x ($x \neq 0$) les deux membres d'une égalité

Si $\frac{a}{x} = b$ ($x \neq 0$) alors $\frac{a}{x} \times x = b \times x$ donc $bx = a$ et puis $x = \frac{a}{b}$

Exemple :

$\frac{7}{x} = 2$ alors $2x = 7$ et donc $x = \frac{7}{2}$

L'équation $\frac{7}{x} = 2$ a une solution qui est $\frac{7}{2}$ ou 3,5

f) Méthode pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue plus complexe.

Exemple :

Résoudre l'équation suivante :

$$6x + 8 = 4x - 15$$

On a : $6x - 4x + 8 = 4x - 4x - 15$

1) On regroupe du même côté de l'égalité les termes en x voir **a)** et **b)** ci-dessus

On obtient : $2x + 8 = -15$

2) On réduit l'expression

On a alors : $2x + 8 - 8 = -15 - 8$

3) On regroupe les nombres constants de l'autre côté de l'égalité voir **a)** et **b)** ci-dessus

On a alors : $2x = -23$

4) On réduit l'expression

alors $\frac{2x}{2} = -\frac{23}{2}$

5) On divise par 2 les deux membres de l'égalité, pour isoler le nombre x voir **c)** ci-dessus

on a donc $x = -\frac{23}{2} = -11,5$

6) On simplifie

La solution de l'équation $6x + 8 = 4x - 15$ est $-11,5$

6) On n'oublie pas de conclure.

II) Equation produit nul

1) Définition :

Une équation produit nul est une équation dont l'un des membres est un produit de facteurs du premier degré et l'autre membre est égal à zéro

Exemple :

$(5x + 3)(3x - 2) = 0$ est une équation produit nul

2) Propriété :

Si l'un des facteurs d'un produit est nul alors ce produit est nul

Donc, pour tout nombre réel a nous pouvons écrire : $0 \times a = 0$ ou $a \times 0 = 0$

3) Propriété Réciproque :

Si un produit est nul alors au moins un de ses facteurs est nul

Donc, si $a \times b = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$

D'une manière générale :

si $(ax + b)(cx + d) = 0$ on a alors $(ax + b) = 0$ ou $(cx + d) = 0$

Exemple :

Résoudre l'équation $(9x - 7)(5x + 9) = 0$

C'est une équation produit (pour la résoudre on utilise la propriété réciproque) :

Lorsqu'un produit est nul alors un de ses facteurs est nul :

$$9x - 7 = 0 \text{ ou } 5x + 9 = 0$$

$$9x = 7 \text{ ou } 5x = -9$$

$$x = \frac{7}{9} \text{ ou } x = -\frac{9}{5} \text{ L'équation produit } (9x - 7)(5x + 9) = 0 \text{ admet deux solutions } \frac{7}{9} \text{ et } -\frac{9}{5}$$

III) Equation du type : $x^2 = a$

a) Définition 1 :

Si $a < 0$ l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution

Exemples :

L'équation $x^2 = -2$ n'a pas de solution puisque $x^2 \geq 0$ et $-2 < 0$

Un nombre positif ne peut être égal à un nombre strictement négatif

b) Définition 2 :

Si $a = 0$, l'équation $x^2 = a$ a une seule solution $x = 0$

L'équation $x^2 = 0$ a une solution qui est 0

c) Définition 3 :

**Si $a > 0$, l'équation $x^2 = a$
admet deux solutions : \sqrt{a} et $-\sqrt{a}$**

Exemples :

$x^2 = 49$ a pour solutions $x = \sqrt{49}$ et $x = -\sqrt{49}$ soit $x = 7$ et $x = -7$

L'équation $x^2 = 49$ a deux solutions : 7 et -7

IV) Inéquation du 1^{er} degré à une inconnue

1) Inégalités

a) Inégalités au sens large

• $a \leq b$ signifie que a est inférieur à b ou que a est égale à b ,
soit $a \leq b$ signifie que $a < b$ ou $a = b$

• $a \geq b$ signifie que a est supérieur à b ou que a est égale à b ,
soit $a \geq b$ signifie que $a > b$ ou $a = b$

b) Inégalités et opérations

Propriété 1 :

Si on **ajoute** ou **soustrait** un même nombre aux deux membres d'une inégalité, on **ne change** pas le sens de cette inégalité

Ainsi quelque soit a , b et c

Si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$

Si $a < b$ alors $a + c < b + c$

Si $a \geq b$ alors $a + c \geq b + c$

Si $a > b$ alors $a + c > b + c$

Exemples : Si $x \leq 7$ alors $x + 3 \leq 7 + 3$ soit $x + 3 \leq 10$

De même : Si $x > 5$ alors $x - 8 > 5 - 8$ soit $x - 8 > -3$

Propriété 2 :

Si on **multiplie** ou **divise** les deux membres d'une inégalité par un même nombre **positif** on **ne change** pas le sens de cette inégalité

Ainsi quelque soit a , b et c

Si $c > 0$ et $a \leq b$ alors $ac \leq bc$

Exemple: $7 > 4$ alors $7 \times 3 > 4 \times 3$ soit $21 > 12$

Si on multiplie ou divise les deux membres d'une inégalité par un même nombre négatif on change le sens de l'inégalité

Ainsi quelque soit a, b et c

**Si $c < 0$ et $a \leq b$ alors $ac \geq bc$
(Il faut bien faire attention au sens de l'inégalité !)**

Exemple: $7 > 4$ alors $7 \times (-3) < 4 \times (-3)$ soit $-21 < -12$

Exemples récapitulatifs :

Si $a \geq 4$ alors on peut écrire $5a \geq 20$ ou par exemple $-2a \leq -8$
ou encore $10a \geq 40$ et $-10a \leq -40$
ou encore $-a \leq -4$ et $8a \geq 32$

2) Inéquations

a) définitions

Définition 1 :

Une inéquation à une inconnue est une inégalité comprenant un nombre inconnu désigné par une lettre.

Exemple :

L'inégalité : $3x + 2 < 7x + 1$ est une inéquation à une inconnue.
Le nombre inconnu est désigné par la lettre x

Définition 2 :

Résoudre une inéquation dont l'inconnue est le nombre x c'est trouver toutes les valeurs possibles du nombre x qui vérifient l'inégalité.

Exemple :

Les solutions de l'inéquation $9x + 5 \geq 6x + 1$ sont tous les nombres x vérifiant cette inégalité

Méthode pour résoudre une inéquation :

Exemple 1

Résoudre $4x \leq 16$

$$4x \leq 16$$

On isole x en divisant les deux membres par 4

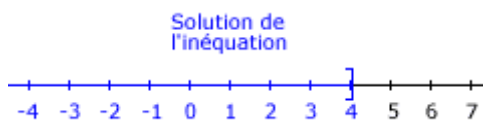
($4 > 0$ on garde le sens de l'inégalité)

$$\frac{4x}{4} \leq \frac{16}{4}$$

$$\text{Soit } x \leq \frac{16}{4} \text{ donc } x \leq 4.$$

Tous les nombres inférieurs ou égale à 4 sont solution de l'inéquation $4x \leq 16$

Représentation des solutions sur une droite graduée :



4 fait partie
de l'ensemble des solutions

Exemple 2

Résoudre $-4x < 16$

$$-4x < 16$$

On isole le x en divisant les deux membres par -4

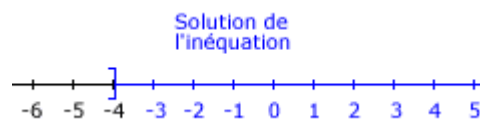
($-4 < 0$ on change le sens de l'inégalité)

$$\frac{-4x}{-4} > \frac{16}{-4}$$

$$\text{Soit } x > -\frac{16}{4} \text{ donc } x > -4.$$

Tous les nombres supérieurs à -4 sont solution de l'inéquation $-4x < 16$

Représentation des solutions sur une droite graduée :



-4 ne fait pas partie
de l'ensemble des solutions

IV) Résolution d'un problème du 1er degré (problème se ramenant à une équation ou une inéquation)

La résolution d'un problème du premier degré se fait en cinq étapes :

- **Choix de l'inconnue**
- **Mise en équation ou inéquation du problème**
- **Résolution de l'équation ou de l'inéquation**
- **Vérification du résultat**
- **Interprétation du résultat et conclusion**

Exemple :

Une mère de quarante cinq ans a une fille de 13 ans.

Dans combien d'année l'âge de la fille sera la moitié de l'âge de sa mère ?

1) Choix de l'inconnue :

On commence par nommer l'inconnue que l'on cherche :

Soit x le nombre d'années cherché

2) Mise en équation du problème :

L'âge de la mère après ces x années sera de $45 + x$

L'âge de la fille après ces x années sera de $13 + x$

et l'âge de la fille sera la moitié de celui de sa mère on a donc :

$$13 + x = \frac{45+x}{2}$$

3) Résolution de l'équation :

$$2 \times (13 + x) = 45 + x$$

$$26 + 2x = 45 + x$$

$$2x - x = 45 - 26$$

$$x = 19$$

4) Vérification du résultat :

$$x = 19$$

Dans 19 ans

$$13 + 19 = 32$$

l'âge de la fille sera de 32 ans,

$$45 + 19 = 64$$

L'âge de la mère sera de 64 ans

L'âge de la fille sera bien la moitié de l'âge de la mère

5) Conclusion, interprétation du résultat :

Dans 19 ans l'âge de la fille sera la moitié de celui de sa mère.