Exercice 1 :

Montrer que F est une primitive de f avec :

1) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$ $\quad F(x)=x-\ln(1+e^x)$ $\quad$ sur $I=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\sqrt{e^x}$ $\quad F(x)=2\sqrt{e^x}$ $\quad$ sur $I=\mathbb{R}$

Exercice 2 :

Dire si les fonctions F et G sont les primitives d'une même fonction :

1) $F(x)=\dfrac{x^2+3x-1}{x-1}$ $\quad G(x)=\dfrac{x^2+7x-5}{x-1}$ $\quad$ sur $I=]1;+\infty[$

2) $F(x)=\tan^2 x$ $\quad G(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\quad$ sur $I=\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$

Exercice 3 :

Trouver la primitive de la fonction cosinus qui s'annule en $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 4 :

Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

$f_1(x)=4x^3$ sur $I=\mathbb{R}$ $\qquad f_2(x)=6x^5+4x^3-1$ sur $I=\mathbb{R}$

$f_3(x)=x^3+x^2+x+1$ sur $I=\mathbb{R}$ $\qquad f_4(x)=4x^7-x^6-\dfrac{2}{3}x-5$ sur $I=\mathbb{R}$

$f_5(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+9$ sur $I=]0;+\infty[$ $\qquad f_6(x)=\dfrac{3}{x}$ sur $I=]0;+\infty[$

$f_7(x)=\sin x-3\cos x$ sur $I=\mathbb{R}$ $\qquad f_8(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}-x$ sur $I=\mathbb{R}^*$

Exercice 5 :

Trouver la primitive F, sur un intervalle à préciser, de la fonction f telle que la courbe $\mathcal{C}_F$ passe par le point A précisé :

$f_1(x)=e^{3x+1}$ avec $A(-1,0)$ $\qquad f_2(x)=xe^{-x^2}$ avec $A\left(\sqrt{\ln 2},1\right)$ $\qquad f_3(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}$ avec $A(2,0)$

Exercice 6 :

On considère la fonction f définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x^2-3x-4}{x-2}$.

Ecrire f sous la forme $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$.

Déterminer alors une primitive de f.

Exercice 7 :

On considère la fonction f définie sur $]-\infty;-2[$ par $f(x)=\dfrac{(x+3)^2}{(x+2)^2}$.

Ecrire f sous la forme $f(x)=a+\dfrac{b}{x+2}+\dfrac{c}{(x+2)^2}$.

Déterminer alors une primitive de f.

Exercice 8 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin^3 x$.

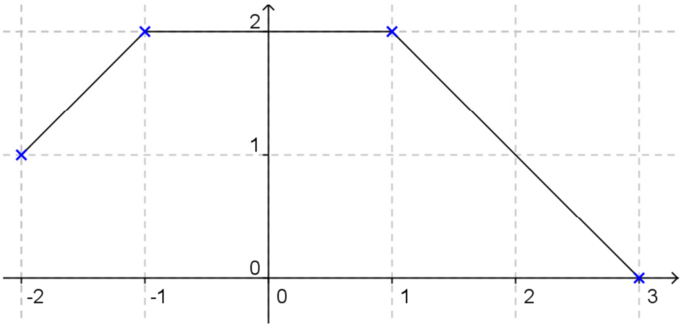
1) En utilisant que $\sin(x)=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, montrer que $f(x)=-\dfrac{1}{4}\left(\sin(3x)+3\sin(x)\right)$

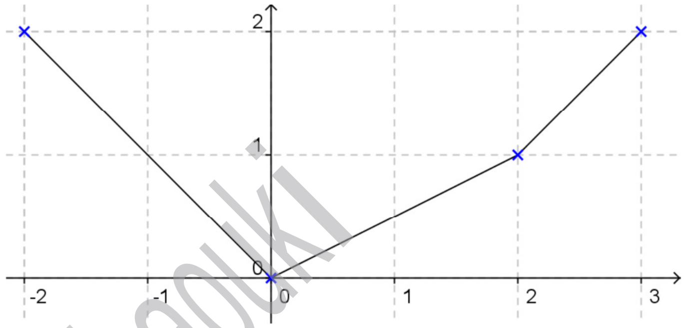
2) Déterminer alors une primitive de f.

Exercice 9 :

On considère une fonction f affine par morceaux.

Calculer dans chaque cas $\int_{-2}^{3} f(t)\,\mathrm{d}t$.

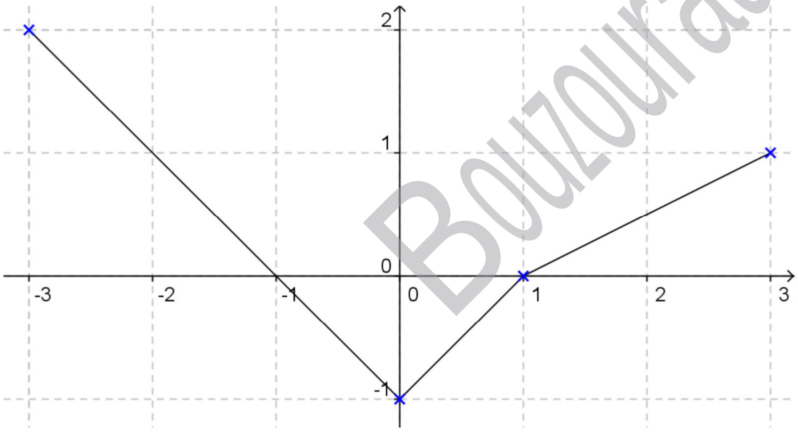




Exercice 10 :

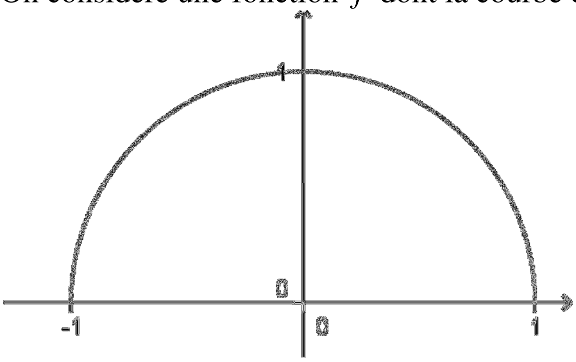
On considère une fonction f affine par morceaux.

Calculer $\int_{-3}^{3} f(t)\,\mathrm{d}t$.



Exercice 11 :

On considère une fonction f dont la courbe est représentée ci-dessous (demi-cercle).



Calculer la valeur moyenne de f sur $[-1;1]$.

Exercice 12 :

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une primitive :

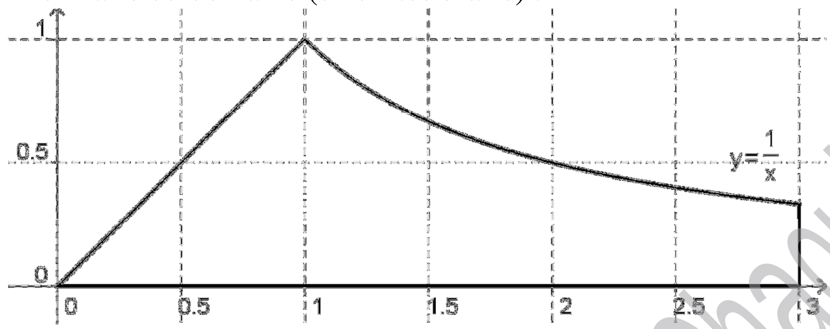
$I_1=\int_0^4 (x-3)\,\mathrm{d}x$ $\quad I_2=\int_2^{-1}(t^2-4t+3)\,\mathrm{d}t$ $\quad I_3=\int_1^2\left(3u^2+2u-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u$

$I_4=\int_0^2 \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x$ $\quad I_5=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ $\quad I_6=\int_1^2\frac{1}{3x+2}\,\mathrm{d}x$

$I_7=\int_0^1 2t\,\mathrm{e}^{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ $\quad I_8=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x$ $\quad I_9=\int_0^{\pi}\sin(2t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 13 :

Déterminer l'aire du domaine (en unités d'aire) :



Exercice 14 :

1) Déterminer deux réels a et b tels que $\frac{1}{x^2-9}=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+3}$

2) Déduisez-en $\int_4^5\frac{1}{x^2-9}\,\mathrm{d}x$

Exercice 15 :

1) Déterminer trois réels a , b et c tels que $\frac{4x^2-5x+1}{x+3}=ax+b+\frac{c}{x+3}$

2) Déduisez-en $\int_2^0\frac{4x^2-5x+1}{x+3}\,\mathrm{d}x$

Exercice 16 :

1) Montrer que $\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}=1-\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

2) Déduisez-en $\int_0^1\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$

Exercice 17 :

1) Rappeler l' expression de $\sin^2 a$ en fonction de $\cos 2a$

2) Déduisez-en $\int_0^{\frac{\pi}{8}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x$

Exercice 18 :

En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$I_1=\int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x$ $\quad I_2=\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x$ $\quad I_3=\int_0^{\pi}(x-1)\cos x\,\mathrm{d}x$ $\quad I_4=\int_0^1(x+2)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

Exercice 19 :

On considère les fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $]0;+\infty[$ par $f(x)=x\cos x$ et $g(x)=x^2\ln x$.
A partir de leurs formes intégrales, trouver à l'aide d'une intégration par parties
1) la primitive de f qui s'annule en π.
2) La primitive de g qui s'annule en 1.

Exercice 20 :

On considère la suite (I_n) définie pour n entier naturel non nul par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2}\,dx$$

1. **a.** Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^{x^2}$.
Démontrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g.

b. En déduire la valeur de I_1.

c. à l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier n, supérieur ou égal à 1, on a

$$I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I_n$$

d. Calculer I_3 et I_5.

Exercice 21 :

Partie A

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{1}{x(x+1)^2}$.

   Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier strictement positif par $u_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\ln n$.

1. Démontrer que pour tout entier strictement positif n, $u_{n+1}-u_n=f(n)$

   En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
2. **a.** Soit k un entier strictement positif.

   Justifier l'inégalité $\displaystyle\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\geqslant 0$. En déduire que $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{k}$.

   Démontrer l'inégalité $\ln(k+1)-\ln k\leqslant\dfrac{1}{k}$ (1).

   b. Écrire l'inégalité (1) en remplaçant successivement k par 1, 2, …, n et

   démontrer que pour tout entier strictement positif n, $\ln(n+1)\leqslant 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}$.

   c. En déduire que pour tout entier strictement positif n, $u_n\geqslant 0$.
3. Prouver que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.

Exercice 22 :

Le but de l'exercice est de donner un encadrement du nombre I défini par :

$$I = \int_0^1 \frac{x^2 e^x}{1+x}\,dx.$$

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$.

1. Étudier les variations de f sur $[0\,;\,1]$.

2. On pose, pour tout entier naturel $S_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{5}\right)$.

a. Justifier que pour tout entier k compris entre 0 et 4, on a :

$$\frac{1}{5} f\left(\frac{k}{5}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{e^x}{1+x}\,dx \leqslant \frac{1}{5} f\left(\frac{k+1}{5}\right)$$

Interpréter graphiquement à l'aide de rectangles les inégalités précédentes.

b. En déduire que : $\frac{1}{5} S_4 \leqslant \int_0^1 \frac{e^x}{1+x}\,dx \leqslant \frac{1}{5}(S_5 - 1)$.

c. Donner des valeurs approchées à 10^{-4} près de S_4 et de S_5 respectivement.

En déduire l'encadrement : $1{,}091 \leqslant \int_0^1 \frac{e^x}{1+x}\,dx \leqslant 1{,}164$.

3. **a.** Démontrer que pour tout réel x de $[0\,;\,1]$, on a : $\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x}$.

b. Justifier l'égalité $\int_0^1 \frac{e^x}{1+x}\,dx = \int_0^1 (1-x)e^x\,dx + I$.

c. Calculer $\int_0^1 (1-x)e^x\,dx$.

d. En déduire un encadrement de $I = \int_0^1 \frac{x^2 e^x}{1+x}\,dx$ d'amplitude strictement inférieure à 10^{-1}.