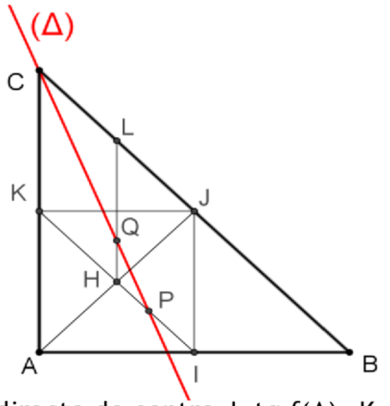
Correction de la série similitudes et nombres complexes

Exercice 1 :

1)



2) f la similitude directe de centre J tq f(A)=K .

$\left.\begin{array}{l}\text{ABC rectangle et} \\ \text{isocèle en A} \\ I = A * B \\ K = A * C \\ J = B * C\end{array}\right\} \Rightarrow$ AIJK est un carré

Le rapport de f : $\dfrac{JK}{JA} = \dfrac{JK}{\sqrt{2}JK} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Autrement :

le triangle AJK est rectangle en K

$\dfrac{JK}{JA} = \dfrac{\text{côté opposé à } \widehat{KAJ}}{\text{hypoténuse}} = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

L'angle de f : $\left(\widehat{\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JK}}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

Montrons que f(K)=L

$\left.\begin{array}{l}\text{CKJ rectangle et} \\ \text{isocèle en K} \\ L = C * J\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\text{KLJ est rectangle} \\ \text{et isocèle en L}\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l}\dfrac{JL}{JK} = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow JL = \dfrac{\sqrt{2}}{2}JK \\ \left(\widehat{\overrightarrow{JK}, \overrightarrow{JL}}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]\end{array}\right\} \Rightarrow f(K) = L$

2)b) H le milieu du segment [AJ].

$\left.\begin{array}{l}\dfrac{JH}{JI} = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow JH = \dfrac{\sqrt{2}}{2}JI \\ \left(\widehat{\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JH}}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]\end{array}\right\} \Rightarrow f(I) = H$

3) $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ repère orthonormé direct.

φ : $M(z) \longmapsto M'(z')$ tq $z' = -\left(\dfrac{1+i}{2}\right)\bar{z} + \dfrac{1+i}{2}$.

3)a) φ : $M(z) \longmapsto M'(z')$ tq $z' = a\bar{z} + b$ où

$|a| = \left|-\left(\dfrac{1+i}{2}\right)\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \neq 1 \Rightarrow \varphi$ est une similitude

indirecte de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

L'affixe du point C est i pour $z=i$

$z' = -\left(\dfrac{1+i}{2}\right)\bar{i} + \dfrac{1+i}{2} = \left(\dfrac{1+i}{2}\right)i + \dfrac{1+i}{2} = \dfrac{2i}{2} = i$

Signifie que $\varphi(C)=C \Leftrightarrow$ C est le centre de φ

3)b) l'affixe du point I est $\frac{1}{2}$

l'affixe du point K est $\frac{1}{2}i$

l'affixe du point J est $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

l' affixe du point H est $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$

3) c) $\varphi(I) = ?$ pour $z = z_I = \frac{1}{2}$

$z' = -\left(\dfrac{1+i}{2}\right)\overline{\dfrac{1}{2}} + \dfrac{1+i}{2} = -\left(\dfrac{1+i}{4}\right) + \dfrac{2+2i}{4} = \dfrac{1+i}{4} = z_H$

Signifie que $\varphi(I)=H$

$\varphi(J) = ?$ pour $z = z_J = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i = \dfrac{1+i}{2}$

$z' = -\left(\dfrac{1+i}{2}\right) \times \overline{\left(\dfrac{1+i}{2}\right)} + \dfrac{1+i}{2} = -\left|\dfrac{1+i}{2}\right|^2 + \dfrac{1+i}{2}$

$= -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1+i}{2} = \dfrac{1}{2}i = z_K$

Signifie que $\varphi(J)=K$.

3)d) $f \circ s_{(IK)}$ est la composée d'une similitude directe f et un antidéplacement $s_{(IK)}$

donc $f \circ s_{(IK)}$ est une similitude indirecte.

$f \circ s_{(IK)}(I) = f(I) = H = \varphi(I)$

$f \circ s_{(IK)}(J) = f(A) = K = \varphi(J)$

$f \circ s_{(IK)}$ et φ sont deux similitudes indirectes qui coïncident en deux points distincts I et J donc $\varphi = f \circ s_{(IK)}$.

4) a) Δ l'axe de la similitude indirecte

$\varphi \left.\begin{array}{l}\text{C le centre de } \varphi \\ \varphi(J) = K\end{array}\right\} \Rightarrow$ l'axe Δ porte la bissectrice de $\widehat{JCK}$

4) b) $\varphi(P)=f(P)$ signifie que $f^{-1} \circ \varphi(P) = P$

On sait que $\varphi = f \circ s_{(IK)} \Leftrightarrow f^{-1} \circ \varphi = s_{(IK)}$

$f^{-1} \circ \varphi(P) = s_{(IK)}(P) = P$ car $P \in (IK)$

$f^{-1} \circ \varphi(P) = P \Leftrightarrow \varphi(P) = f(P)$

Montrons que $\varphi(P) = Q$

$\varphi(P) = f(P) \Leftrightarrow h_{\left(C,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \circ S_\Delta(P) = f(P)$

$\Leftrightarrow h_{\left(C,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}(P) = f(P)$ car $P \in \Delta$

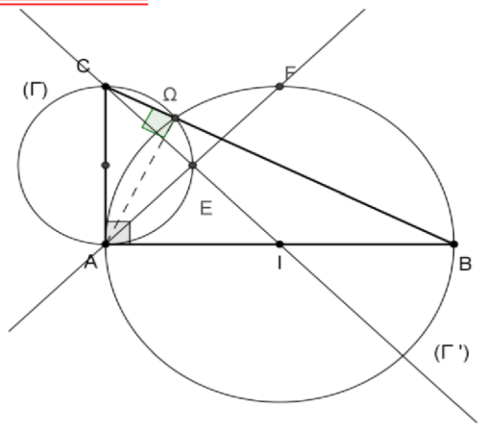
$\Rightarrow f(P) \in (CP) = \Delta$ ①

D'autre part $P \in (IK) \Rightarrow f(P) \in f((IK)) = (HL)$ ②

① et ② $\Rightarrow f(P) \in \Delta \cap (HL) = \{Q\}$

Donc $\varphi(P) = Q$ car $\varphi(P) = f(P)$

Exercice 2 :



1) S la similitude directe tq S(A)=B et f(C) =A.

1) a) le rapport de S est $\frac{BA}{AC} = \frac{2AC}{AC}$

L'angle de S :

$\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}}\right) \equiv \pi + \left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

1) b) Soit Ω le centre de S. On sait que l'angle de la similitude S est $\frac{\pi}{2}$ alors :

$\left.\begin{array}{l} S(\Omega) = \Omega \\ S(A) = B \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\left.\begin{array}{l} S(\Omega) = \Omega \\ S(C) = A \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega A}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega B}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega A}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}}\right)[2\pi] \equiv \pi[2\pi]$

donc $\Omega \in (BC)$

Comme $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ alors Ω est le projeté orthogonal de A sur (BC).

2) a) (Γ) est le cercle de centre J le milieu de [AC] et de rayon $R = \frac{AC}{2}$

(Γ ') est le cercle de centre I le milieu de [AB] et de rayon $R' = \frac{AB}{2}$

$\left.\begin{array}{l} S([AC]) = [AB] \\ AB = 2AC \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} S(J) = I \\ R' = 2R \end{array}\right\} \Rightarrow S(\Gamma) = \Gamma'$

2) b) S est une similitude d'angle $\frac{\pi}{2}$

$\left.\begin{array}{l} S(C) = A \\ S(E) = F \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{CE},\overrightarrow{AF}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \Rightarrow (CE) \perp (AF)$ ①

D'autre part le triangle AEC est inscrit dans le cercle (Γ) de diamètre son coté [AC] donc $(AE) \perp (CE)$ ②

① et ② $\Rightarrow (AE) \parallel (AF) \Rightarrow$ Les points A ,E et F sont alignés

Construction du point F=S(E)

$\left.\begin{array}{l} A\text{ ,E et F sont alignés} \Rightarrow F \in (AE) \\ E \in (\Gamma) \Rightarrow S(E) \in S(\Gamma) \Leftrightarrow F \in (\Gamma') \end{array}\right\rangle F \in (AE) \cap (\Gamma')$

3)a) f la similitude indirecte tq f(Ω)=A et f(A)=B

le rapport de f est $\frac{AB}{\Omega A}$

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABΩ :

$AB = \sqrt{\Omega A^2 + \Omega B^2} = \sqrt{\Omega A^2 + 4\Omega A^2}$ car ΩB=2ΩA

$= \sqrt{5}\ \Omega A$

Donc le rapport de la similitude f est égal à $\sqrt{5}$

Montrons que f((BC))=(AC).

$(BC)\perp(A\Omega) \Rightarrow f((BC)) \perp f((A\Omega))$ car une similitude conserve l'orthogonalité

Signifie que $f((BC)) \perp (AB)$ car f(Ω)=A et f(A)=B

D'autre part $\Omega \in (BC) \Rightarrow f(\Omega) = A \in f((BC))$

$\left\{\begin{array}{l} f((BC)) \perp (AB) \\ A \in f((BC)) \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{f((BC)) = (AC)}$

3)b)

f est une similitude indirecte de rapport $\sqrt{5} \neq 1$

donc $f \circ f$ est une homothétie de rapport $\sqrt{5}^2 = 5$

$f \circ f(\Omega) = f(A) = B$ donc le centre de l'homothétie $f \circ f \in (\Omega B) = (BC)$

On sait que $f((BC)) = (AC) \Leftrightarrow$

$f(f((BC))) = f((AC)) \Leftrightarrow$

$\boxed{(BC) = f((AC))}$ car $f \circ f$ est une homothétie de centre $\in$ (BC)

3)c)
$\{C\}=(AC)\cap(BC) \Rightarrow f(C) = f((AC))\cap f((BC)) = (AB) \cap (AC) = C$

$f(C)=C$ signifie que C est le centre de f.
Soit Δ l'axe de la similitude indirecte f.

$\left.\begin{array}{l} C \text{ le centre de } f \\ f(A)=B \end{array}\right\} \Rightarrow$ l'axe Δ porte la bissectrice de $\widehat{ACB}$

4) $\left(A,\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AC}\right)$ est un R.O.D

4) a) S est la similitude directe de centre Ω, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $2\neq1$. L'écriture complexe de S est de la forme $z'=az+b$ avec

$a=2e^{i\frac{\pi}{2}}=2i$ et $z_\Omega=\dfrac{b}{1-a}$

Remarque : La relation $z_\Omega=\dfrac{b}{1-a}$ ne permet pas de calculer b car on ne sait pas les coordonnées de Ω dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AC}\right)$

Calcul de b par une autre méthode :
Dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AC}\right)$: $z_A=0$, $z_B=2$ et $z_C=i$

On sait que $S(A)=B \Leftrightarrow z_B = az_A + b$
$\Leftrightarrow 2 = 2i\times0 + b = b$

Conclusion : l'expression complexe de la similitude directe S est $z'=2iz+2$

Calcul de l'affixe de z_Ω

$z_\Omega=\dfrac{b}{1-a} \Leftrightarrow z_\Omega=\dfrac{2}{1-2i}=\dfrac{2(1+2i)}{1^2-(2i)^2}=\dfrac{2}{5}+\dfrac{4}{5}i$

Autrement :
Ω est le centre de la similitude S $\Leftrightarrow S(\Omega)=\Omega$

$\Leftrightarrow z=2iz+2 \Leftrightarrow z(1-2i)=2 \Leftrightarrow z=\dfrac{2}{1-2i}$

4)b)
f est la similitude indirecte de centre C et de rapport $\sqrt5\neq1$. L'écriture complexe de f est de la forme $z'=a\overline{z}+b$

$\begin{cases} f(C)=C \\ f(A)=B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_C=a\overline{z_C}+b \\ z_B=a\overline{z_A}+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i=-a\times i+b \\ 2=a\times0+b \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1-2i \\ b=2 \end{cases}$

Conclusion : L'expression complexe de la similitude indirecte f est $z'=(-1-2i)\overline{z}+2$

4)c) f est la similitude indirecte de centre C, de rapport $\sqrt5$ et d'axe Δ. D'après une propriété de l'axe Δ d'une similitude indirecte :

$M\in\Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{CM'}=\sqrt5\,\overrightarrow{CM}$ où $M'=f(M)$
$\Leftrightarrow z_{M'}-z_C=\sqrt5(z_M-z_C)$
$\Leftrightarrow (-1-2i)\overline{z_M}+2-i=\sqrt5(z_M-i)$

On pose $M(x,y) \Leftrightarrow z_M=x+iy$

$\Leftrightarrow (-1-2i)(x-iy)+2-i=\sqrt5(x+iy-i)$

$\Leftrightarrow -x+iy-2ix-2y+2-i=\sqrt5(x+iy-i)$

$\Leftrightarrow \left(-x(1+\sqrt5)-2y+2\right)+i\left(y(1-\sqrt5)-2x-1+\sqrt5\right)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x(1+\sqrt5)-2y+2=0 \\ y(1-\sqrt5)-2x-1+\sqrt5=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x(1+\sqrt5)+2y-2=0 \\ -4y-2(1+\sqrt5)x+4=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x(1+\sqrt5)+2y-2=0 \\ x(1+\sqrt5)+2y-2=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \boxed{x(1+\sqrt5)+2y-2=0}$

Exercice 3 :

f: $M(z)\mapsto M'(z')$ tq $z'=\dfrac{3+i\sqrt3}{4}z+\dfrac{1-i\sqrt3}{2}$.

1) φ : $M(z)\mapsto M'(z')$ tq $z'=az+b$ où

$a=\dfrac{3+i\sqrt3}{4}=\dfrac{\sqrt3}{2}\left(\dfrac{\sqrt3}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=\dfrac{\sqrt3}{2}e^{i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow |a|=\dfrac{\sqrt3}{2}\neq1$

$\Rightarrow$ f est une similitude directe de rapport $|a|=\dfrac{\sqrt3}{2}$, d'angle $\arg(a)\equiv\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$ et de centre A d'affixe

$z_A=\dfrac{b}{1-a}=\dfrac{\frac{1-i\sqrt3}{2}}{1-\frac{3+i\sqrt3}{4}}=\dfrac{2-2i\sqrt3}{1-i\sqrt3}=\dfrac{2+2i\sqrt3-2i\sqrt3+6}{1^2-(i\sqrt3)^2}=2$

Autrement : (Calcul de l'affixe du centre)

$f(A)=A \Leftrightarrow z_A=\frac{3+i\sqrt{3}}{4}z_A+\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \dots$

2) M un point d'affixe $z \neq 2$ et $M'=f(M)$

2) a)

$$\frac{z'-z}{z'-2}=\frac{\frac{3+i\sqrt{3}}{4}z+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}-z}{\frac{3+i\sqrt{3}}{4}z+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}-2}$$

$$=\frac{\frac{-1+i\sqrt{3}}{4}z+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}{\frac{3+i\sqrt{3}}{4}z+\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}}=\frac{\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}z+1\right)}{\left(\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}z+1\right)}$$

$$=-\frac{1-i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}}=-\frac{(1-i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})}{(3+i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})}$$

$$=-\frac{3-i\sqrt{3}-3i\sqrt{3}-3}{9+3}=\frac{4\sqrt{3}}{12}i=\frac{\sqrt{3}}{3}i\in i\mathbb{R}$$

$\frac{z'-z}{z'-2}$ est imaginaire pur $\Leftrightarrow$

$\frac{z_{M'}-z_M}{z_{M'}-z_A}$ est imaginaire pur $\Leftrightarrow$

$\frac{z_{\overrightarrow{MM'}}}{z_{\overrightarrow{AM'}}}$ est imaginaire pur $\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}\perp\overrightarrow{AM'}$

$\Rightarrow$ Le triangle AMM' est rectangle en M'

2) b) I le milieu de [MA] et le triangle AMM' rectangle en M' $\Rightarrow$ I est le centre du cercle circonscrit à AMM' $\Rightarrow$ IM= IM'=IA

$\Rightarrow$ IMM' est isocèle en I

$$MM'=|z_{M'}-z_M|=|z'-z|$$

$$=\left|\frac{3+i\sqrt{3}}{4}z+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}-z\right|=\left|\frac{-1+i\sqrt{3}}{4}z+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right|$$

$$=\left|\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{-1}{2}z+1\right)\right|=\left|\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right|\left|-\frac{1}{2}z+1\right|$$

$$=\frac{\sqrt{1+3}}{2}\left|-\frac{1}{2}z+1\right|=\left|-\frac{1}{2}z+1\right|$$

I est le milieu de [AM] $\Rightarrow z_I=\frac{z_A+z_M}{2}=\frac{2+z}{2}$

$$IM=|z_M-z_I|=\left|z-\frac{2+z}{2}\right|=\left|\frac{1}{2}z-1\right|=\left|-\frac{1}{2}z+1\right|$$

Donc IM= IM=MM' signifie que IMM'est équilatéral

Montrons que IMM' est direct. D'après 2)a) on a :

$$\frac{z'-z}{z'-2}=\frac{z_{\overrightarrow{MM'}}}{z_{\overrightarrow{AM'}}}=\frac{\sqrt{3}}{3}i\Rightarrow\left(\widehat{\overrightarrow{AM'},\overrightarrow{MM'}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\Rightarrow\left(\widehat{\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'M}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\Rightarrow AMM' \text{ est direct}$$

$\Rightarrow$ IMM' est direct car $I=M*A$

2)c) Construction du point M' connaissant M :

- On place le point A d'affixe 2
- On construit le point I le milieu de [AM]
- Le point M' image de M par la similitude directe f est le point tel que le triangle IMM' soit équilatéral direct.

Exercice 4 :

1)

(Γ) de centre A et de rayon 2
(Γ') de centre B et de rayon $\sqrt{2}$
$S(\Gamma)=\Gamma'$

$\Rightarrow k=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $S(A)=B$

L'expression complexe de la similitude directe est de la forme $z'=az+b$ où

$$a=ke^{i\theta}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1+i}{2}$$

Calcul de b :

$$S(A)=B\Leftrightarrow z_B=az_A+b\Leftrightarrow 3=\frac{1+i}{2}(2+i)+b$$

$$\Leftrightarrow 3=\frac{2+i+2i-1}{2}+b=\frac{1+3i}{2}+b$$

$$\Leftrightarrow b=3-\frac{1+3i}{2}=\frac{5-3i}{2}$$

Conclusion :

L'expression complexe de la similitude directe S est $\boxed{z'=\frac{1+i}{2}z+\frac{5-3i}{2}}$

2) Calcul de l'affixe du centre I

$$z_I=\frac{b}{1-a}=\frac{\frac{5-3i}{2}}{1-\frac{1+i}{2}}=\frac{5-3i}{1-i}=\frac{(5-3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=4+i$$

3) Calcul de l'affixe du point O' = S(O).

$$S(O)=O'\Leftrightarrow z_{O'}=az_O+b$$

$$\Leftrightarrow z_{O'}=a\times 0+b=b=\frac{5-3i}{2}$$

4) $M\in(\Gamma) \Rightarrow S(M)\in S(\Gamma) \Leftrightarrow M'\in(\Gamma')$ ①

$S=S^{\text{directe}}_{\left(I,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right)}$ et $S(M)=M' \Rightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IM'}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ ②

①et② $\Rightarrow$ M' est l'intersection de (Γ') et la demie droite [IT) tq $\left(\widehat{\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IT}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ où $z_I=4+i$

5) a) S' la similitude indirecte de centre I.

$$\left.\begin{array}{l}(\Gamma)\text{ de centre A et de rayon 2}\\ (\Gamma')\text{ de centre B et de rayon }\sqrt{2}\\ S'(\Gamma)=\Gamma'\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}k=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ S'(A)=B\end{array}$$

L'expression complexe de la similitude indirecte S' est de la forme $z'=a\overline{z}+b$

$$\begin{cases}S'(I)=I\\ S'(A)=B\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z_I=a\overline{z_I}+b\\ z_B=a\overline{z_A}+b\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4+i=a(4-i)+b\\ 3=a(2-i)+b\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4+i=a(4-i)+3-a(2-i)\\ b=3-a(2-i)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1+i=2a\\ b=3-a(2-i)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1+i}{2}\\ b=3-\frac{1+i}{2}(2-i)=3-\frac{3+i}{2}=\frac{3-i}{2}\end{cases}$$

Conclusion :

L'expression complexe de la similitude indirecte S' est $\boxed{z'=\frac{1+i}{2}\overline{z}+\frac{3-i}{2}}$

5)b) Soit (Δ) l'axe de la similitude indirecte S'.

S'est la similitude indirecte de centre I, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D'après une propriété de l'axe

$$M\in\Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{IM} \quad \text{où } M'=S'(M)$$

$$\Leftrightarrow z_{M'}-z_I=\frac{\sqrt{2}}{2}(z_M-z_I)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+i}{2}\overline{z_M}+\frac{3-i}{2}-4-i=\frac{\sqrt{2}}{2}(z_M-4-i)$$

On pose $M(x,y)\Leftrightarrow z_M=x+iy$

$$(1+i)(x-iy)+3-i-8-2i=\sqrt{2}(x+iy-4-i)\Leftrightarrow$$

$$x-iy+ix+y-5-3i=\sqrt{2}(x+iy-4-i)\Leftrightarrow$$

$$\left(x(1-\sqrt{2})+y-5+4\sqrt{2}\right)+i\left(x-y(1+\sqrt{2})-3+\sqrt{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x(1-\sqrt{2})+y-5+4\sqrt{2}=0\\ x-y(1+\sqrt{2})-3+\sqrt{2}=0\end{cases}$$

$\times(1-\sqrt{2})$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x(1-\sqrt{2})+y-5+4\sqrt{2}=0\\ x(1-\sqrt{2})+y-5+4\sqrt{2}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(\Delta): x(1-\sqrt{2})+y-5+4\sqrt{2}=0}$$