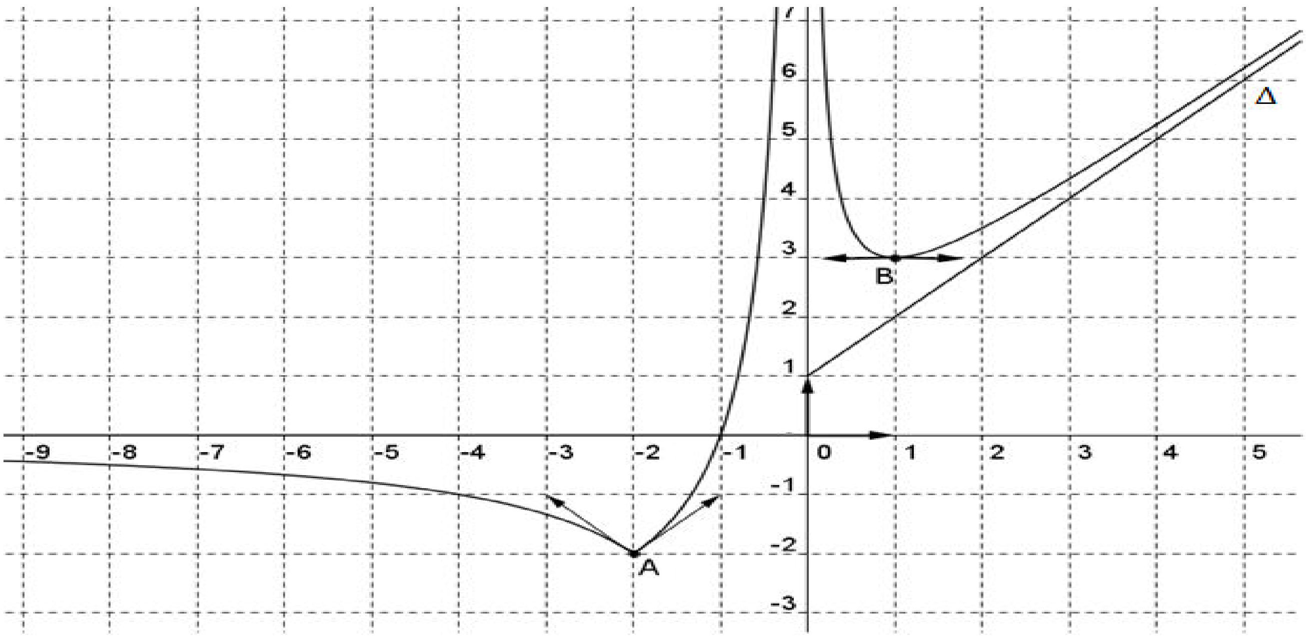
Mathématiques	Devoir de Synthèse N°1	
Lycée Takelsa		
Classe : $3^{ème}$ Math Date : le 17/12/2015	Durée : 2 h	Prof : Ziadi Mourad

Exercice N :1(06pts)

Sur la figure ci-contre est tracée la courbe représentative C_f dans un repère orthonormé (O,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$) d'une fonction f continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. On sait de plus que :

- La droite Δ est une asymptote à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.
- La droite d'équation : $y = 0$ est une asymptote à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$.
- C_f admet deux demi-tangentes au point A$(-2;-2)$.
- La tangente à C_f au point B$(1;3)$ est parallèle à l'axe des abscisses.



A partir du graphique et des renseignements fournis, déterminer :

1)a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to0^-} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{2x+3}$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi}{f(x)-x-1}$, $\lim_{x\to1} \frac{f(x)-3}{x-1}$, $\lim_{x\to(-2)^-} \frac{f(x)+2}{x+2}$ et $\lim_{x\to(-2)^+} \frac{f(x)+2}{x+2}$.

c) La fonction f est-elle dérivable en -2 ? Justifier votre réponse et interpréter ce résultat.

2) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x^2 f(x)$.

a) Montrer que $\lim_{x\to1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = 6$.

b) Donner alors une équation cartésienne de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 1.

Exercice N :2(08pts)

I- Soit la fonction h définie sur $]-\infty,-4] \cup [0,+\infty[$ par $h(x) = \sqrt{x^2+4x} + x + 2$.

C_h sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim_{x\to+\infty} h(x)$.
2) Déterminer $\lim_{x\to-\infty} h(x)$ .Interpréter graphiquement le résultat.
3) a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a : $h(x) - 2x = \frac{8-\frac{4}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1-\frac{2}{x}}$

   b) En déduire que la courbe C_h admet une asymptote oblique Δ d'équation : $y = 2x+4$.

   c) Pour tout $\in]0,+\infty[$, comparer $\sqrt{x^2+4x}$ et $(x+2)$ puis étudier la position relative sur $]0,+\infty[$ de C_h et Δ .

II- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+4x} + x + 2 & si\ x \in]-\infty,-4[\cup]0,+\infty[\\ x^3+6x^2+9x+2 & si\ \ x \in [-4,0] \end{cases}$$

C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que f est continue en 0.
2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

   b) Montrer que f est dérivable à gauche en 0 et déterminer $f'_g(0)$.

3) a) Montrer que f est dérivable en tout réel a de $]0,+\infty[$ et que $f'(a) = \frac{a+2}{\sqrt{a^2+4a}} + 1$.

   b) Déterminer le réel a tel que la tangente T à C_f au point d'abscisse a soit parallèle à la droite D d'équation : $y = (\sqrt{2}+1)x - 1$.

Exercice N :3(06pts)

Le plan est orienté dans le sens direct. Dans la feuille annexe, ABC est un triangle isocèle de sommet principal A tel que $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ et ζ son cercle circonscrit.

1) Déterminer la mesure principale de l'angle orienté$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.
2) Soit M un point de l'arc orienté $\widehat{BC}$, distinct de B et C. On désigne par I, H et K les projetés orthogonaux de M respectivement sur (AB) , (BC) et (AC). **(Voir figure).**
   a) Montrer que les points H, K ,C et M appartiennent à un même cercle ζ' que l'on précisera.
   b) Montrer que $(\overrightarrow{KH},\overrightarrow{KM}) \equiv (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM})[2\pi]$.
   c) Montrer que $(\overrightarrow{KM},\overrightarrow{KI}) \equiv (\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})[2\pi]$. En déduire que les points I, H et K sont alignés.
3) Soit $\Gamma = \{N \in P\ tel\ que\ (\overrightarrow{NB},\overrightarrow{NC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]\ \}$.

   On désigne par D le symétrique de C par rapport à A .
   a) Montrer que D appartient à Γ .
   b) Déterminer et construire alors sur l'annexe l'ensemble Γ .
   c) Montrer que le point M' symétrique de M par rapport à (BC) appartient à Γ .

Annexe à rendre avec la copie

Nom :……………….Prénom :……………….N°……………..