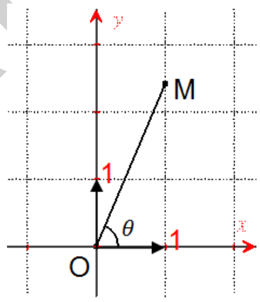
| | | |
|---|---|---|
| Lycée Tahar Sfar<br>Mahdia | **Devoir de contrôle n° 1**<br>Mathématiques | Niveau : 4 ème Tech 2 |
| Date : 04 / 11 / 2015 | Prof : Meddeb Tarak | Durée : 2 heures |

## Exercice n°1 : ( 3 pts)

*Pour chaque question, une seule des trois propositions a/, b/ et c/ est correcte. On indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 0.75 point, une réponse fausse enlève 0.25 point, l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, alors la note sera ramenée à zéro.*

1) Soit le nombre complexe $Z=-2e^{i\frac{\pi}{6}}$, on a :

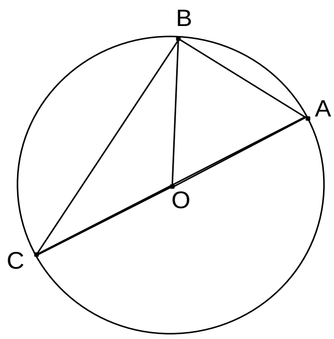
   $a/\ \arg(Z)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ $\quad b/\ \arg(Z)=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ $\quad c/\ \arg(Z)=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$




2) $M$ est le point d'affixe $z$ tel que $\operatorname{Re}(z)=1$ et $\arg(z)=\theta+2k\pi$.

   La forme exponentielle de $z$ est :

   $a/\ \frac{1}{\cos\theta}e^{i\theta}$ $\quad b/\ \cos\theta e^{i\theta}$ $\quad c/\ \sin\theta e^{i\theta}$




3) Le triangle $OAB$ est équilatéral.

   Les points $A$, $B$ et $C$ ont pour affixes respectives $a$, $b$ et $c$.

   $\frac{b-c}{b-a}$ est égale à :

   $a/\ 1$ $\quad b/\ i$ $\quad c/\ i\sqrt{3}$.

4) L'image de l'intervalle $[-2\ ;\ 1]$ par la fonction $f : x \mapsto x^2$ est :

   $a/\ [0\ ;\ 4]$ $\quad b/\ [1\ ;\ 4]$ $\quad c/$ Autre réponse.

## Exercice n°2 : (4 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit $\theta$ un réel de l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$. On désigne par $A$, $M$ et $N$ les points d'affixes respectives $z_A=2$, $z_M=1+e^{i\theta}$ et $z_N=1-e^{i\theta}$.

1) Montrer que : $z_M=2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et que $z_N=2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)}$.
2) Montrer que le quadrilatère $OMAN$ est un rectangle.
3) Déterminer $\theta$ pour que $OMAN$ soit un carré.

## Exercice n°3 : (6 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On note $A$ la point d'affixe $1$ et $B$ le point d'affixe $1-2i$.

Soit $f$ l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M$ d'affixe $z \neq 1$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que : $z' = \dfrac{z-1+2i}{z-1}$.

1) Déterminer l'ensemble $E$ des points $M(z)$ tels que $z'$ est un réel.
2) $a/$ Montrer que, pour tout nombre complexe $z \neq 1$, on a : $(z'-1)(z-1) = 2i$.

   $b/$ En déduire que pour tout point $M$ distinct de $A$, on a : $AM \times AM' = 2$.

   $c/$ Montrer alors que, si $M$ appartient au cercle $(C)$ de entre $A$ et de rayon 1, alors $M'$ appartient a un cercle $(C')$ que l'on précisera.
3) $a/$ Montrer que pour tout point $M$ distinct de $A$, on a : $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM}}\right) + \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM'}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.

   $b/$ En déduire que, si $M$ appartient à la perpendiculaire à $(O,\vec{u})$ passant par $A$, alors $M'$ appartient à une droite que l'on précisera.

## Exercice n°3 : (7 pts)

Soit $f$ la fonction définie sur $IR$ par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-x} - 2x + 8 & si\ x \leq 0 \\ \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+4}-2} & si\ x > 0 \end{cases}$.

On désigne par $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) $a/$ Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

   $b/$ Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $\dfrac{-1}{\sqrt{x+4}-2} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{\sqrt{x+4}-2}$.

   En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

   $c/$ Interpréter géométriquement le résultat.
2) $a/$ Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

   $b/$ Montrer que $f$ est continue en 0.
3) $a/$ Montrer que : pour tout $x < 0$, on a : $f(x) + 3x - 8 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}$.

   $b/$ En déduire que la droite $D: y = -3x + \dfrac{17}{2}$ est une asymptote de $C_f$.

*Bonne chance*