EXERCICE N°1 : (4 points)

1) Calculer chacune des limites suivantes :

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-3x-4}{x-4}\ ;\quad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1}\ ;\quad \lim_{x\to(-1)}\frac{x^3+x+2}{3x+3}\quad \text{et}\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x+7}-\sqrt{x^2+5}}$$

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-3;2\}$ par $f(x)=\dfrac{2x+6}{\sqrt{x^2+x+3}-3}$

a) Montrer que f est prolongeable par continuité en (-3).

b) Donner le prolongement de f.

EXERCICE N°2 : (6 points)

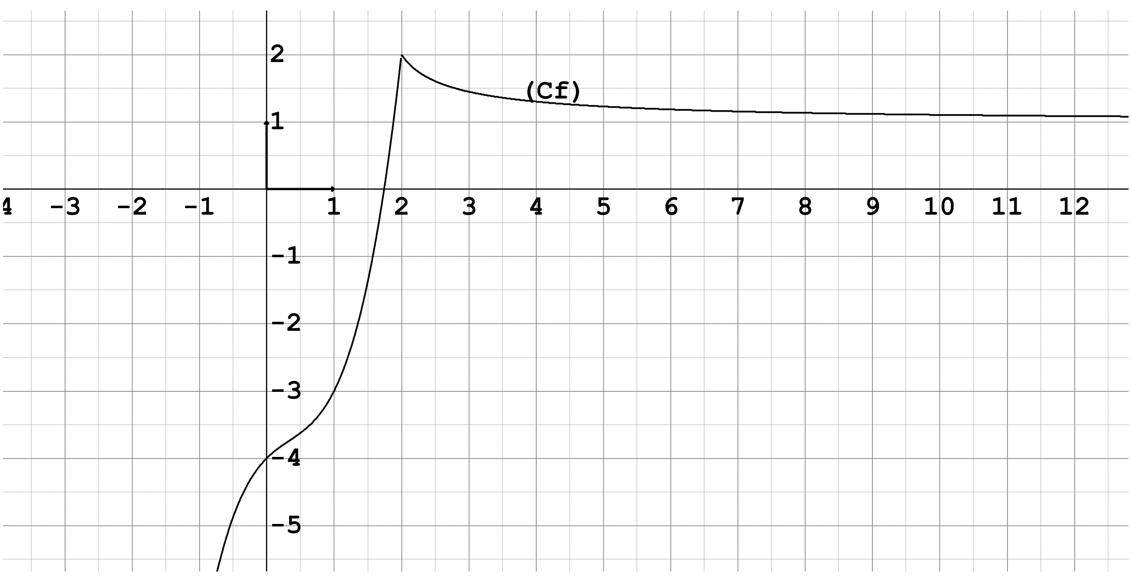
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2} & si\ x>2 \\ f(x)=x^3-x^2+x-4 & si\ x\le 2\end{cases}$

1) Etudier la continuité de f en 2.

2) a) Justifier la continuité de f sur $]-\infty,2[\ et\ sur\ ]2,+\infty[$.

b) Déduire que f est continue sur IR.

3) On trace si dessous la courbe (C_f) de f .



a) Préciser le maximum de f sur IR.

b) Donner les variations de f sur IR.

gharsalliz@gmail.com

Bon Travail

4) a) Calculer $f(1)$ et $f(2)$.

b) Donner le sens de variation de f sur $[1,2]$.(à partir de 3°))

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1,2]$.

d) Déterminer la valeur approchée à 0,1 près par excès de α.

e) Montrer que $(\alpha - 1)(\alpha^2 + 1) = 3$

Exercice3 *(5points)*

ABC un triangle telles que : $AB = 2$; $AC = 3$ *et* $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

Soit O le milieu du segment $[BC]$

1) a) Calculer $AB^2 - AC^2$.

b) Montrer que pour tout point M du plan, on a :$MB^2 - MC^2 = 2.\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{CB}$.

c) En déduire que $AB^2 - AC^2 = 2.\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{CB}$.

d) Déterminer et construire l'ensemble : $(D) = \{M \in plan\ telles\ que : MB^2 - MC^2 = -5\}$

2) On construit à l'extérieur du triangle ABC deux triangles AFC et AEB qui sont isocèles et rectangles en A, et soit I le milieu de $[EF]$.

a) Montrer que : $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BC} = -3\sqrt{3}$ et que : $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BC} = 3\sqrt{3}$.

b) Déduire que $(AI) \perp (BC)$

Exercice4*(5points)*

Le plan est orienté dans le sens direct .

Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal C tel que : $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

1) **a)** Faire une figure tel que AB = 4 cm .

b) Trouver la mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$.

2) On construit à l'extérieure du triangle ABC les carrés ACDE et CBFG dans le sens direct .

a) Trouver la mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{CD}})$.

b) En déduire la nature du triangle CGD .

3) Calculer $(\widehat{\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{CA}})$, en déduire mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG}})$.

4) Soit $E = \left\{M \in P \ / \ (\widehat{\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}}) \equiv \frac{\pi}{12}[\pi]\right\}$.

a) Vérifier que $B \in E$.

b) Construire l'ensemble E.

 gharsalliz@gmail.com Bon Travail

CORECTION DE DEVOIR DE SYNTHESE N°1

EXERCICE 1

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x+1)(x-4)}{(x-4)}=\mathbf{5}$

- $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x+2}{3x+3}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x^2-x+2)}{3(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^2-x+2)}{3}=\mathbf{\dfrac{4}{3}}$

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+3x}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3x}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+3x}\right)^2-2^2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3x}+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3x}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+4)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3x}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+4)}{\left(\sqrt{x^2+3x}+2\right)}=\mathbf{\dfrac{5}{4}}$

- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+7}-\sqrt{x^2+5}}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{x^2+5}\right)}{\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{x^2+5}\right)\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{x^2+5}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{x^2+5}\right)}{\left(\sqrt{x+7}\right)^2-\left(\sqrt{x^2+5}\right)^2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{x^2+5}\right)}{-x^2+x+2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{x^2+5}\right)}{-(x+1)(x-2)}=$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-(x+2)\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{x^2+5}\right)}{(x+1)}=\dfrac{-4\times 6}{3}=\mathbf{-8}$

2. a) $\lim\limits_{x\to -3}f(x)=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x+6}{\sqrt{x^2+x+3}-3}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(2x+6)\left(\sqrt{x^2+x+3}+3\right)}{\left(\sqrt{x^2+x+3}-3\right)\left(\sqrt{x^2+x+3}+3\right)}$

$=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(2x+6)\left(\sqrt{x^2+x+3}+3\right)}{x^2+x+3-9}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2(x+3)\left(\sqrt{x^2+x+3}+3\right)}{(x-2)(x+3)}$

$=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2\left(\sqrt{x^2+x+3}+3\right)}{(x-2)}=\mathbf{-\dfrac{12}{5}}$

Alors f est prolongeable par continuité en (-3).

- b) le prolengement de f est $\begin{cases} f(x) & si\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;2\} \\ -\dfrac{12}{5} & \text{Si}\quad x=-3\end{cases}$

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2} & si\quad x\in\,]2;+\infty[\\ f(x)=x^3-x^2+x-4 & \text{Si}\quad x\in\,]-\infty;2] \end{cases}$

gharsalliz@gmail.com
Bon Travail

• 1) On a $f(2)=2^3-2^2+2-4=2$

Etude de continuité de f a driote en 2

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\left(\sqrt{x^2-3}-1\right)\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{\left(\sqrt{x^2-3}\right)^2-1}{(x-2)\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)\ (x+2)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x+2)}{\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)}=\frac{4}{2}=2=f(2)$$

Donc f est continue a droite en 2

Etude de continuité de f a gauche en 2

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} x^3-x^2+x-4=2=f(2)$

Donc f est continue agauche en 2

__**conclusion**__ $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=f(2)$

Donc f est continue en 2

• 2)-a) $x\to\sqrt{x^2-3}-1$ est continue sur $\left]-\infty;-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3};+\infty\right[$,

en particulier elle est continue sur $]2;+\infty[$

$x\to x-2$ est continue sur $\mathbb{R}$, *en* particulier elle est continue sur $]2;+\infty[$

Puisque $x-2\neq 0\ \forall\ x\in]2;+\infty[$

Alors $x\to\dfrac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2}$ est continue sur $\left]2;+\infty\right[$

comme etant le quotient de deux fonctions continues sur $]2;+\infty[$

• $x\to x^3-x^2+x-4$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier elle est continue sur $]-\infty;2]$.

b) ona f est continue sur $]-\infty;2]\ \cup\ ]2;+\infty[\ \cup\{0\}=\mathbb{R}$.

• 3) $-a)$ le maximum de f est egale à **2**

-b) f est strictemet croissante sur $]-\infty;2]$

f est strictemet décroissante sur $]2;+\infty[$

• 4) $-a)$ $f(1)=1^3-1^2+1-4=-3$

$f(2)=2$

• b) f est strictement croissante sur $[1;2]$ car $[1;2]\subseteq]-\infty;2]$ *et* f est strictemet croissante sur $]-\infty;2]$

• c) - Ona :

- f est continue sur $[1;2]$
- $f(1)\times f(2)<0$
- f est strictement croissante sur $[1;2]$

Alors l'équation f(x)=0 admet une unique solution $\boldsymbol{\alpha}$ dans $[1;2]$

• d)- Ona $f(1.7)=-0.27$ et $f(1.8)=0.39$

Donc 1.8 estune valeur approchée à 0.1 prés par éxcés de $\boldsymbol{\alpha}$.

• e) $(\alpha-1)(\alpha^2+1)-3=\alpha^3-\alpha^2+\alpha-4=f(\alpha)=0$

d'ou le résultat

EXERCICE 3

1) – $a)^* \; AB^2 - AC^2 = 4 - 9 = -5$

$b)^* \; MB^2\text{-}MC^2 = \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2 = (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$

$= (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CM})(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})$

$= \overrightarrow{CB} \times 2\overrightarrow{MO} \quad = 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{CB}.$

$c)^*$ On a pour tout point M du plan

$MB^2 - MC^2 = 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{CB}.$ on premblace M par A

on obtient $AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{CB}.$

$d)^* MB^2 - MC^2 = -5$ signefie que $2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow \; 2\overrightarrow{CB}(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{AO}) = \vec{0}.$

$\Leftrightarrow \; 2\overrightarrow{CB}(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \; 2\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{MA} = \vec{0} \Leftrightarrow \; \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{MA} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \; (MA) \perp (CB)$

Alors (D)est la droite perpendiculaires à (BC)

passante par A

$2) - a)^* \; \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AE}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$

$= -\cancel{\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC} = 2 \times 3\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3})$

$= \text{-}6\sin(\frac{\pi}{3}) = -6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -3\sqrt{3}$

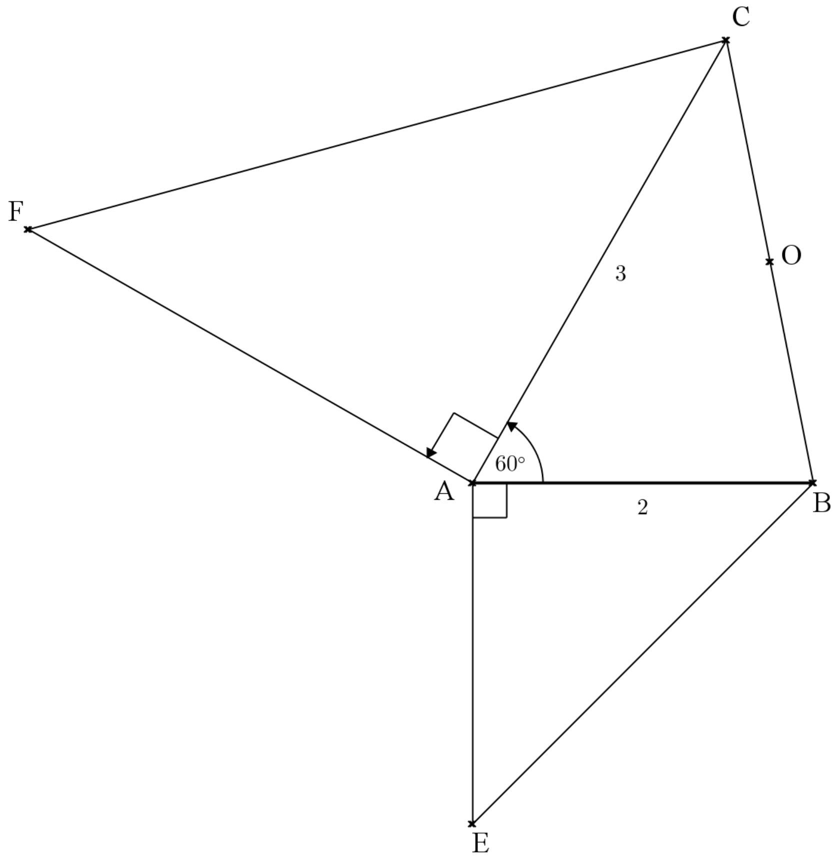
$^*\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AF}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \text{-}\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AB} + \cancel{\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AC}}$

$= -3 \times 2\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) = 6\sin(\frac{\pi}{3}) = 3\sqrt{3}$

$b)^* Ona \; \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BC} = -3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 0$

$\Leftrightarrow \; \overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}\right) = 0 \; \Leftrightarrow \; 2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AI} = 0$

$\Leftrightarrow \; (BC) \perp (AI)$



EXERCICE 4

1) – b) * $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right) \equiv \pi - 2\times\frac{\pi}{6}[2\pi] \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

2) $\left(\overrightarrow{CG},\overrightarrow{CD}\right) \equiv \pi - \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right) \equiv \pi - \frac{2\pi}{3}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

b) * $\left.\begin{array}{l} CD = CG \\ \left(\overrightarrow{CG},\overrightarrow{CD}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{array}\right\} CGD \text{ est un triangle équilatèral}$

3) * $\left(\overrightarrow{CG},\overrightarrow{CA}\right) \equiv \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}[2\pi] \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$

* $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AG}\right) \equiv \dfrac{\pi-\frac{5\pi}{6}}{2} \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$,(GCA est isocele en C)

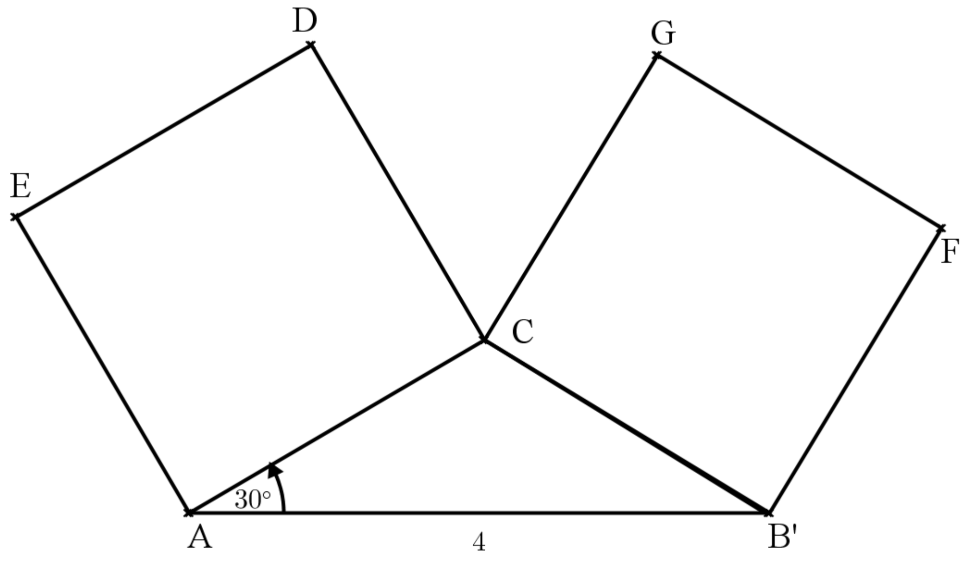
4)* $E=\left\{M \in P / \left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD}\right) \equiv -\frac{\pi}{12}[2\pi]\right\}$

a) * On a $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right) \equiv -\left(\dfrac{\pi-\frac{5\pi}{6}}{2}\right) \equiv -\frac{\pi}{12}[2\pi]$

donc $B \in E$

b)* l'ensemble E est l'arc $\overset{\frown}{CD}$ de centre $\text{med}[CD] \cap \text{med}[BC]$

 gharsalliz@gmail.com Bon Travail



gharsalliz@gmail.com
Bon Travail