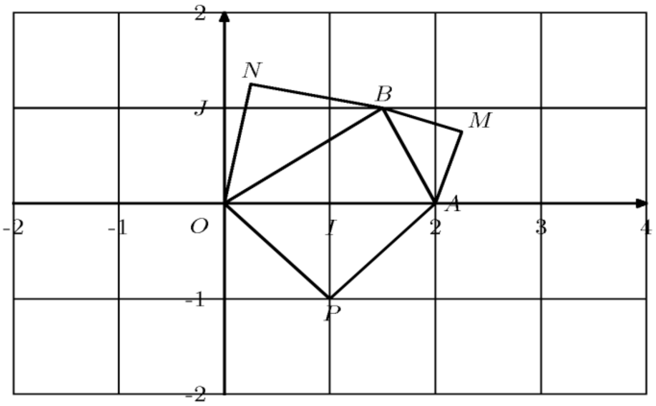
EXERCICE 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OJ}\right)$. On considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_A = 2 \quad ; \quad z_B = \frac{3}{2} + i$$

On considère les points M, N et P tels que les triqngles AMB, BNO et OPA soient des triangles rectangles isocèles de sens direct comme le montre la figure ci-dessous :



On note s_1 la similitude directe de centre A qui transforme M en B.

On note s_2 la similitude directe de centre O qui transforme B en N. On considère la transformation :

$r = s_2 \circ s_1$

Le but de l'exercice est de démontrer de deux façons différentes que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

1. **A l'aide des transformations :**
   a. Donner l'angle et le rapport de s_1 et de s_2.
   b. Déterminer l'image du point M puis celle du point I par la transformation r.
   c. Justifier que r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dont on précisera le centre.
   d. Quelle est l'image du point O par r ?
   e. En déduire que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

2. **En utilisant les nombres complexes :**
   a. Donner les écritures complexes de s_1 et s_2. On utilisera les résultats de la question 1. a..
   b. En déduire les affixes z_M et z_N des points M et N.
   c. Donner, sans justification, l'affixe z_p du point P puis démontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

Correction

1. a. • La similitude s_1 a pour centre A et transforme le point M en le point B ; son angle et son rapport sont respectivement définis par :

$$\left(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AB}\right) \quad ; \quad \frac{AB}{AM}$$

Le triangle ABM est isocèle rectangle en M, on a la mesure :

$$\left(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{4}$$

En notant $a = AM$, dans le triangle rectangle ABM en M et d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AB^2 = AM^2 + MB^2$$
$$AB^2 = a^2 + a^2$$
$$AB^2 = 2{\cdot}a^2$$
$$AB = a{\cdot}\sqrt{2}$$

On a le rapport de longueurs suivant :

$$\frac{AB}{AM} = \frac{a{\cdot}\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$$

La similitude directe s_1 a pour centre A, pour angle $\frac{\pi}{4}$ et pour rapport $\sqrt{2}$.

• Le triangle BNO est rectangle isocèle en O, on a la mesure :

$$\left(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{ON}\right) = \frac{\pi}{4}$$

En notant $b = OB$, dans le triangle rectangle BNO en N et d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$OB^2 = ON^2 + BN^2$$
$$OB^2 = b^2 + b^2$$
$$OB^2 = 2{\cdot}b^2$$
$$OB = b{\cdot}\sqrt{2}$$

On a le rapport suivant :

$$\frac{ON}{OB} = \frac{b}{b{\cdot}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La similitude directe s_2 a pour centre O, pour angle $\frac{\pi}{4}$ et pour rapport $\sqrt{2}$.

b. • On a :

$$r(M) = \left(s_2 \circ s_1\right)(M)$$
$$= s_2\left[s_1(M)\right]$$
$$= s_2(B)$$
$$= N$$

• Déterminons l'image du point I par la similitude r :

Puisque le triangle AIP est un triangle rectangle isocèle direct, on a :

$s_1(I) = P$

Puisque le triangle OPI est un triangle isocèle direct, on a :

$s_2(P) = I$

On en déduit :

$r(I) = s_2\left[s_1(I)\right] = s_2(P) = I$

Le point I est un point invariant de la similitude r.

c. La composée de similitudes directs est une similitude directe dont l'angle est la somme de leurs angles. Ainsi, l'angle de la similitude r a pour valeur :

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

d. Le rapport de la similitude r est le produit des rapports des similitudes s_1 et s_2 :

$$\sqrt{2}{\times}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2} = 1$$

La similitude R est la roation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre I ; on en déduit que l'image du point O est le point P.

e. Par la similitude r, on a :

$r(O) = P \quad ; \quad r(M) = N$

Or, la similitude r a pour angle $\frac{\pi}{2}$; on en déduit :

$$\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{PN}\right)=\frac{\pi}{2}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{PN}$ sont orthogonaux ; on en déduit que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

2. a. La similitude directe s_1 a pour centre A, pour angle $\frac{\pi}{4}$ et pour rapport $\sqrt{2}$; elle admet l'écriture suivante :

$$\begin{aligned}
z'-z_A &= \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}\cdot(z-z_A)\\
z'-2 &= \sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot(z-2)\\
z'-2 &= \left(\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2}+i\cdot\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2}\right)\cdot(z-2)\\
z'-2 &= (1+i)\cdot(z-2)\\
z'-2 &= (1+i)\cdot z-(1+i)\cdot 2\\
z'-2 &= (1+i)\cdot z-2-2\cdot i\\
z' &= (1+i)\cdot z-2\cdot i
\end{aligned}$$

La similitude directe s_2 a pour centre le point B, pour angle $\frac{\pi}{4}$ et pour rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$; on a l'écriture complexe :

$$\begin{aligned}
z'-z_O &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}\cdot(z-z_O)\\
z' &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot z\\
&= \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+i\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]\cdot z\\
&= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot i\right)\cdot z
\end{aligned}$$

b. Le point M est l'antécédent du point B par la similitude s_1 :

$$\begin{aligned}
s_1(M) &= B\\
(1+i)\cdot z_M-2\cdot i &= \frac{3}{2}+i\\
(1+i)\cdot z_M &= \frac{3}{2}+3\cdot i\\
z_M &= \frac{\frac{3}{2}+3\cdot i}{1+i}\\
z_M &= \frac{3+6\cdot i}{2+2\cdot i}\\
z_M &= \frac{(3+6\cdot i)\cdot(2-2\cdot i)}{(2+2\cdot i)\cdot(2-2\cdot i)}\\
z_M &= \frac{6-6\cdot i+12\cdot i-12\cdot i^2}{2^2+2^2}\\
z_M &= \frac{6+6\cdot i+12}{8}\\
z_M &= \frac{18+6\cdot i}{8}\\
z_M &= \frac{18}{8}+\frac{6}{8}\cdot i\\
z_M &= \frac{9}{4}+\frac{3}{4}\cdot i
\end{aligned}$$

Le point N est l'image du point B par la similitude s_2 ; on a :

$$\begin{aligned}
s_2(B) &= N\\
z_N &= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot i\right)\cdot z_B\\
&= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot i\right)\cdot\left(\frac{3}{2}+i\right)\\
&= \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot i+\frac{3}{4}\cdot i+\frac{1}{2}\cdot i^2\\
&= \frac{3}{4}+\frac{5}{4}\cdot i-\frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{4}+\frac{5}{4}\cdot i
\end{aligned}$$

c. On a les coordonnées suivantes :

$P\,(1\,;\,-1)$

On a les coordonnées des vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{OM}\left(\frac{9}{4}\,;\frac{3}{4}\right)\quad;\quad\overrightarrow{PN}\left(-\frac{3}{4}\,;\frac{9}{4}\right)$$

On a le produit scalaire suivant :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{PN} &= \frac{9}{4}\times\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{4}\times\frac{9}{4}\\
&= -\frac{27}{16}+\frac{27}{16}\\
&= 0
\end{aligned}$$

VERS L'EXERCICE 4 DE LA SERIE N°8

EXERCICE 4

On considère un carré direct $ABCD$ *(c'est à dire un carré $ABCD$ tel que* $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$*)* de centre I.

Soit J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[CD]$ et $[DA]$. Γ_1 désigne le cercle de diamètre $[AI]$ et Γ_2 désigne le cercle de diamètre $[BK]$.

Partie A

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s telle que :
   $s(A)=I \quad ; \quad s(B)=K$

2. Montrer que les cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en deux points distincts : le point J et le centre Ω de la similitude directe s.

3. a. Déterminer les images par s des droites (AC) et (BC). En déduire l'image du point C par s.

   b. Soit E l'image par s du point I. Démontrer que E est le milieu du segment $[ID]$.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Démontrer que les points A, Ω et E sont alignés.
   (On pourra considérer la transformation $t=s\circ s$)

Partie B

Désormais, on considère que le côté du carré mesure 10 unités et on se place dans le repère orthonormé direct $\left(A;\frac{1}{10}\cdot\overrightarrow{AB};\frac{1}{10}\cdot\overrightarrow{AD}\right)$.

1. Donner les affixes des points A, B, C et D.

2. Démontrer que la similitude directe s a pour écriture complexe :
   $z'=\frac{i}{2}\cdot z+5+5\cdot i$

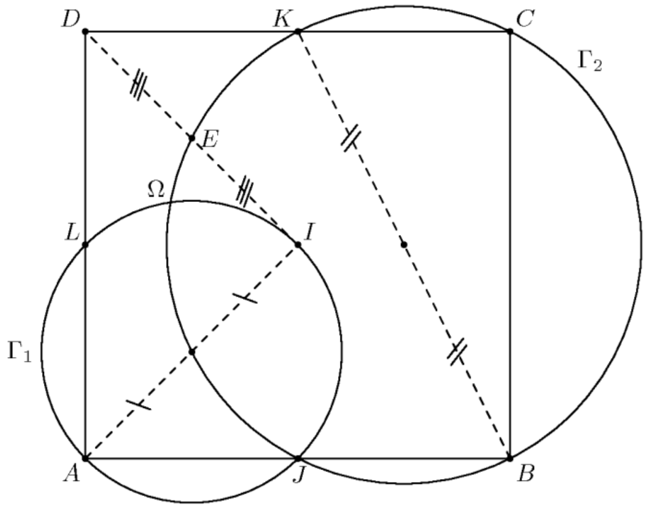
3. Calculer l'affixe ω du centre Ω de s.

4. Calculer l'affixe z_E du point E et retrouver l'alignement des points A, Ω et E.

5. Démontrer que les droites (AE), (CL) et (DJ) sont concourantes au point Ω.

Correction

VERS CORRECTION



Partie A

1. Puisque $A\neq B$ et $I\neq K$ alors il existe une unique similitude directe s vérifiant :
   $s(A)=I \quad ; \quad s(B)=K$

   Le rapport de la similitude est défini par :
   $\frac{IK}{AB}=\frac{1}{2}$

   L'angle de la similitude a pour valeur :
   $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{IK}\right)=\frac{\pi}{2}$

2. Les triangles AJI et BJK sont deux triangles rectangles en J ; on en déduit que le point J appartient aux cercles de diamètres $[AI]$ et $[BK]$: J est un point d'intersection des cercles Γ_1 et Γ_2.

   Mais le point J n'est pas le centre de la similitude car :
   $\left(\overrightarrow{JA};\overrightarrow{JI}\right)=-\frac{\pi}{2}$

   L'angles de la similitude est $\frac{\pi}{2}$; on a :
   - $\begin{cases} s(\Omega)=\Omega \\ s(A)=I \end{cases} \Longrightarrow \left(\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega I}\right)=\frac{\pi}{2}$
     Le triangle $A\Omega I$ étant rectangle en Ω, on en déduit que le point Ω appartient au cercle de diamètre $[AI]$.
   - $\begin{cases} s(\Omega)=\Omega \\ s(B)=K \end{cases} \Longrightarrow \left(\overrightarrow{\Omega B};\overrightarrow{\Omega K}\right)=\frac{\pi}{2}$
     Le triangle $B\Omega K$ étant rectangle en Ω, on en déduit que le point Ω appartient au cercle de diamètre $[BK]$.

   Le point Ω est le second point d'intersection des cercles Γ_1 et Γ_2.

3. a. Par une similitude, l'image d'une droite est une droite. L'angle de la similitude s étant $\frac{\pi}{2}$, la similitude s transforme une droite en une droite perpendiculaire.
   - Puisque $s(A)=I$, l'image de la droite (AC) est une droite passant par I et perpendiculaire à la droite (AC).
     L'image, par s, de la droite (AC) est la droite (DB) *(en utilisant le fait que les diagonales du carré sont perpendiculaires entre elles)*.
   - Puisque $s(B)=K$, on en déduit que l'image de la droite (BC) par la similitude s est la droite passant par le point K et perpendiculaire à la droite (BC).
     L'image, par s, de la droite (BC) est la droite (CD).

   Le point C est l'intersection des droites (AC) et (BC) ; les similitudes conservant les points d'intersec-

tion, l'image du point C est le point d'intersection des images des droites (AC) et (BC) ; or, le point D est le point d'intersection des droites (DB) et (CD) :
$s(C) = D$.

b. Notons I' l'image du point I par la similitude s. On a :
$s(A) = I \quad ; \quad s(I) = I'$
Le point I' a les caractéristiques suivantes :
$II' = \frac{1}{2}\cdot AI \quad ; \quad \left(\overrightarrow{AI}\,;\overrightarrow{II'}\right) = \frac{\pi}{2}$
Ainsi, le point I' appartient à la demi-droite $[ID)$.
Les diagonales du carré étant de même longueur et se coupant en leur milieu, on a :
$AI = DI$
De la propriété, $II' = \frac{1}{2}\cdot AI$, on en déduit que le point I' est le milieu du segment $[DI]$:
$I' = E$

4. Par la relation de Chasles, on peut écrire :
$$\left(\overrightarrow{\Omega A}\,;\overrightarrow{\Omega E}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega A}\,;\overrightarrow{\Omega I}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega I}\,;\overrightarrow{\Omega E}\right)$$
Or, l'angle de la similitude est $\frac{\pi}{2}$, on a :

- $s(A) = I \Longrightarrow \left(\overrightarrow{\Omega A}\,;\overrightarrow{\Omega I}\right) = \frac{\pi}{2}$
- $s(I) = E \Longrightarrow \left(\overrightarrow{\Omega I}\,;\overrightarrow{\Omega E}\right) = \frac{\pi}{2}$

On en déduit l'égalité :
$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{\Omega A}\,;\overrightarrow{\Omega E}\right) &= \left(\overrightarrow{\Omega A}\,;\overrightarrow{\Omega I}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega I}\,;\overrightarrow{\Omega E}\right)\\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\\ &= \pi\end{aligned}$$
Les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{\Omega E}$ sont colinéaires : les points A, Ω et E sont alignés.

Partie B

1. Dans le plan muni du repère, on a les affixes suivantes :
$z_A = 0 \quad ; \quad z_B = 10 \quad ; \quad z_C = 10 + 10\cdot i$
$z_D = 10\cdot i \quad ; \quad z_I = 5 + 5\cdot i \quad ; \quad z_K = 5 + 10\cdot i$

2. La similitude s est définie par les images suivantes :
$s(A) = I \quad ; \quad s(B) = K$ Toute similitude directe s admet une écriture de la forme :
$z' = a\cdot z + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$
Ainsi, l'écriture complexe de la similitude s doit vérifier le système suivant :
$$\begin{cases} z_I = s(z_A) \\ z_K = s(z_B)\end{cases}$$
$$\begin{cases} a\cdot 0 + b = 5 + 5\cdot i \\ a\cdot 10 + b = 5 + 10\cdot i\end{cases}$$
De la première ligne, on en déduit la valeur de b :
$b = 5 + 5\cdot i$

Utilisons la seconde ligne pour déterminer la valeur de a :
$$\begin{aligned} a\cdot 5 + b &= 5 + 10\cdot i\\ a\cdot 10 + (5 + 5\cdot i) &= 5 + 10\cdot i\\ a\cdot 10 + 5 + 5\cdot i &= 5 + 10\cdot i\\ a\cdot 10 &= 5\cdot i\\ a &= \frac{1}{2}\cdot i\end{aligned}$$
Ainsi, la similitude s admet pour écriture complexe :
$z' = \frac{1}{2}\cdot i\cdot z + 5 + 5\cdot i$

3. Le centre d'une similitude directe *(différente d'une translation)* est son unique point invariant ; déterminons l'affixe du point invariant pour la similitude s :
$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2}\cdot i\cdot z + 5 + 5\cdot i\\ z - \frac{1}{2}\cdot i\cdot z &= 5 + 5\cdot i\\ z\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\cdot i\right) &= 5 + 5\cdot i\\ z &= \frac{5 + 5\cdot i}{1 - \frac{1}{2}\cdot i}\\ z &= \frac{10 + 10\cdot i}{2 - i}\\ z &= \frac{(10 + 10\cdot i)\cdot(2 + i)}{(2 - i)\cdot(2 + i)}\\ z &= \frac{20 + 10\cdot i + 20\cdot i + 10\cdot i^2}{2^2 + 1^2}\\ z &= \frac{20 + 30\cdot i - 10}{5}\\ z &= \frac{10 + 30\cdot i}{5}\\ z &= 2 + 6\cdot i\end{aligned}$$
Le point Ω a pour affixe $2+6\cdot i$; ainsi, on a les coordonnées des vecteurs suivants :
$\overrightarrow{\Omega E}\left(\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\right) \quad ; \quad \overrightarrow{\Omega A}\,(-2\,;-6)$
On obtient facilement l'égalité :
$\overrightarrow{\Omega A} = -4\cdot\overrightarrow{\Omega E}$

Les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{\Omega E}$ sont colinéaires ; on en déduit que les points A, Ω et E sont alignés.

4. On vient de montrer que le point Ω appartient à la droite (AE).
   - On a les coordonnées des deux vecteurs :
   $\overrightarrow{\Omega L}\,(-2\,;-1) \quad ; \quad \overrightarrow{\Omega C}\,(8\,;4)$
   On observe que ces deux vecteurs sont colinéaires à l'aide de l'égalité suivante :
   $\overrightarrow{\Omega C} = -4\cdot\overrightarrow{\Omega L}$
   On en déduit que les points Ω, C et L sont alignés.
   - On a les coordonnées des deux vecteurs :
   $\overrightarrow{\Omega D}\,(-2\,;4) \quad ; \quad \overrightarrow{\Omega J}\,(3\,;-6)$
   On observe que ces deux vecteurs sont colinéaires à l'aide de l'égalité suivante :
   $\overrightarrow{\Omega D} = -\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{\Omega J}$
   On en déduit que les points Ω, D et J sont alignés.

Le point Ω appartient aux trois droites (AE), (CL), (DJ) : Ω est leur point de concourance.

EXERCICE 5

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v})$.

On considère la similitude indirecte f d'écriture complexe :

$$z' = (1 + i\cdot\sqrt{3})\cdot\overline{z}$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugé de z.

Soient les points A et B d'affixes respectives :

$$z_A = \sqrt{6} + i\cdot\sqrt{2} \quad ; \quad z_B = -\sqrt{2} + i\cdot\sqrt{6}$$

On note A' et B' les images respectives des points A et B par f.

Une figure fournie en ANNEXE du sujet, sera complétée et rendue avec la copie. Les différentes constructions seront faites à la règle et au compas, et les traits de construction devront apparaître clairement.

1. a. Ecrire les affixes des points A et B sous forme exponentielle.

   b. Montrer que le triangle OAB est rectangle isocèle direct.

   c. En déduire la nature du triangle $OA'B'$.

   d. Montrer que l'affixe z'_A de A' vérifie l'égalité :
   $z_{A'} = 2\cdot z_A$
   En déduire la construction de A' et B'.

2. On note r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et s la symétrie orthogonale d'axe $(O;\ \overrightarrow{u})$. On pose $g = r \circ s$.

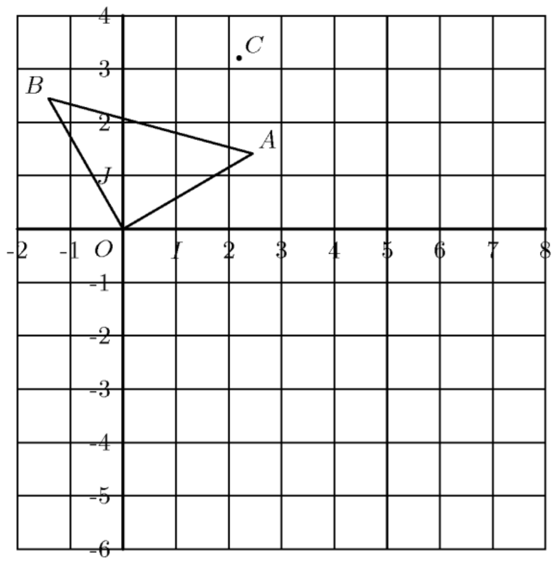
   a. Déterminer l'écriture complexe de la transformation g.

   b. Montrer que les points O et A sont invariants par g.

   c. En déduire la nature de la transformation g.

3. a. Montrer que l'on peut écrire $f = h \circ g$, où h est une homothétie de centre et de rapport à déterminer.

   b. Sur la figure placée en **ANNEXE**, un point C est placé. Faire la construction de l'image C' de C par la transformation f.



Correction

1. a. On a les écritures forme exponentielle suivantes :

- $z_A = \sqrt{6} + i\cdot\sqrt{2} = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\Big(\frac{\sqrt{6}}{2\cdot\sqrt{2}} + i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2}}\Big)$
$= 2\cdot\sqrt{2}\cdot\Big(\frac{\sqrt{6}}{2\cdot\sqrt{2}} + i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2}}\Big) = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\Big)$
$= 2\cdot\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{6}}$
- $z_B = -\sqrt{2} + i\cdot\sqrt{6} = \cdot\sqrt{2}\cdot\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2}} + i\cdot\frac{\sqrt{6}}{2\cdot\sqrt{2}}\Big)$
$= 2\cdot\sqrt{2}\cdot\Big(-\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = 2\cdot\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}}$

   b. Déterminons une expression simple du quotient suivant :

$$\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = \frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}} - 0}{2\cdot\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{6}} - 0} = \frac{e^{i\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}}}{e^{i\cdot\frac{\pi}{6}}}$$
$$= e^{i\cdot\frac{2\cdot\pi}{3} - i\cdot\frac{\pi}{6}} = e^{i\cdot\left(\frac{2\cdot\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\cdot\frac{3\cdot\pi}{6}} = e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}$$

   Ainsi, l'interprétation géométrique du module et de l'argument d'un quotient permet d'écrire :

- $\frac{OB}{OA} = \left|\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right| = \left|e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}\right| = 1$
On en déduit l'égalité $OB = OA$: le triangle OAB est isocèle en O.
- $\arg\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right) = \arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right)$
$= \arg\left(e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{2}$
On en déduit que le triangle OAB est rectangle en O.

   c. Les similitudes transforment les triangles en des triangles semblables ; de plus, les similitudes indirectes transforment un angle en un angle de mesure opposé.
   Le point O est un point invariant de la similitude f :
   $z'_O = (1 + i\cdot\sqrt{3})\cdot\overline{z_O} = 0$
   Ainsi, le triangle $OA'B'$ est l'image du triangle OAB par la similitude indirecte f : $OA'B'$ est un triangle isocèle rectangle indirect en O.

   d. Déterminons l'image du point A par la transformation f :

$$\begin{aligned}
z_{A'} &= (1 + i\cdot\sqrt{3})\cdot\overline{z_A} = (1 + i\cdot\sqrt{3})\cdot\overline{(\sqrt{6} + i\cdot\sqrt{2})}\\
&= (1 + i\cdot\sqrt{3})\cdot(\sqrt{6} - i\cdot\sqrt{2})\\
&= \sqrt{6} - i\cdot\sqrt{2} + i\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6} - i^2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\\
&= \sqrt{6} - i\cdot\sqrt{2} + 3\cdot i\cdot\sqrt{2} + \sqrt{6} = 2\cdot\sqrt{6} + 2\cdot i\cdot\sqrt{2}\\
&= 2\cdot(\sqrt{6} + i\cdot\sqrt{2}) = 2\cdot z_A
\end{aligned}$$

   Ainsi, le point A' est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 2.
   Le triangle $OA'B'$ étant isocèle rectangle isocèle, on en déduit que le point B' s'obtient par l'image du point A' par la rotation de centre O et de d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

2. a. La symétrie axiale s d'axe $(O;\ \overrightarrow{u})$ a pour écriture complexe :
   $z' = \overline{z}$
   La rotation r de centre O et de rayon $\frac{\pi}{3}$ a pour écriture complexe :
   $z' - z_O = e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}\cdot(z - z_O)$
   $z' = e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}\cdot z$
   Ainsi, la transformation g admet l'expression complexe :

$$g(z) = (r \circ s)(z) = r[s(z)]$$
$$= r(\overline{z}) = e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}\cdot\overline{z}$$

b. On a les images suivantes par la transformation g :

- $g(z_A) = c = e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}\cdot\overline{2\cdot\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{6}}}$
$$= e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cdot e^{-i\cdot\frac{\pi}{6}} = 2\cdot\sqrt{2}e^{i\cdot\frac{\pi}{3}-i\cdot\frac{\pi}{6}}$$
$$= 2\cdot\sqrt{2}e^{i\cdot\frac{\pi}{6}} = z_A$$
Le point A est un point invariant de la transformation g.
- $g(z_O) = e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}\cdot\overline{z_O} = e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}\cdot 0 = 0$
Le point O est un point invariant de la transformation g.

c. Montrons que la transformation g n'est pas la transformation identité ; pour cela, déterminons l'image du point B :

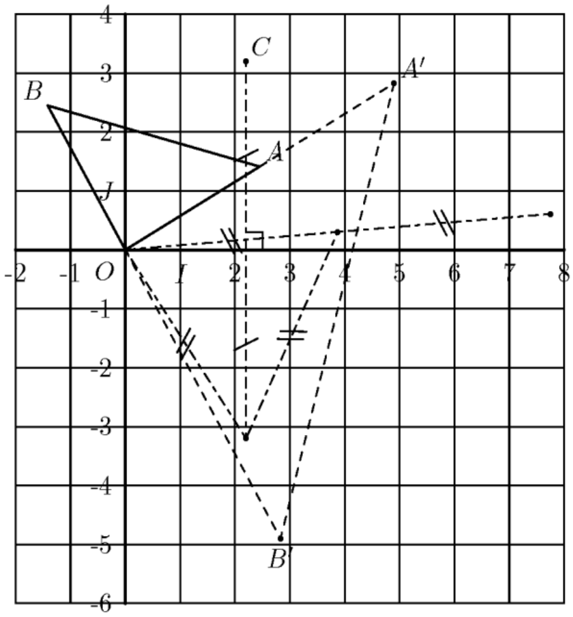
$$z_{B'} = e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}\cdot\overline{z_B} = e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}\cdot\overline{2\cdot\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}}}$$
$$= e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cdot e^{-i\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}} = 2\cdot\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{3}-i\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}}$$
$$= 2\cdot\sqrt{2}\cdot e^{-i\cdot\frac{\pi}{3}}$$
$$\neq z_B$$

Ainsi, la transformation n'est pas l'identité mais elle admet deux points fixes ; étant une similitude, on en déduit aue g est la symétrie axiale d'axe (OA).

3. a. Considérons h l'homothétie de centre O et de rapport 2 ; elle admet l'écriture complexe suivante :
$h(z) = 2\cdot z$

On a la composé suivante de similitudes :
$$(h \circ g)(z) = h[g(z)] = h(e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}\cdot\overline{z})$$
$$= 2\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}\cdot\overline{z} = 2\cdot(\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})\cdot\overline{z}$$
$$= (1 + i\cdot\sqrt{3})\cdot\overline{z} = f(z)$$

b.



VERS L'EXERCICE 7 DE LA SERIE N°8

EXERCICE 7

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$.

On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

1. On considère les points A d'affixe 1 et B d'affixe i. On appelle S la réflexion *(symétrie axiale)* d'axe (AB).

   Montrer que l'image M' par S d'un point m d'affixe z a pour affixe :
   $z' = -i\cdot\overline{z} + 1 + i$

2. On note H l'homothétie de centre A et de rapport -2. Donner l'écriture complexe de H.

3. On note f la composée $H \circ S$.

   a. Montrer que f est une similitude.

   b. Déterminer l'écriture complexe de f.

4. On appelle M'' l'image d'un point M par f.

   a. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que :
   $\overrightarrow{AM''} = -2\cdot\overrightarrow{AM}$
   est la droite (AB).

   b. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que :
   $\overrightarrow{AM''} = 2\cdot\overrightarrow{AM}$
   est la perpendiculaire en A à la droite (AB).

Correction :

1. la symétrie d'axe (AB) est une similitude indirecte du plan ; ainsi, il existe $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ tel que S ait pour écriture complexe :
   $z' = a\cdot\overline{z} + b$

   La réflexion S possède les points A et B comme point invariant ; ainsi, son écriture complexe doit vérifier le système suivant :
   $$\begin{cases} z_A = a\cdot\overline{z_A} + b \\ z_B = a\cdot\overline{z_B} + b \end{cases}$$

   En effectuant la soustraction, membre à membre, de ces deux équations, on obtient l'égalité suivante :
   $$z_A - z_B = a\cdot\overline{z_A} - a\cdot\overline{z_B}$$
   $$z_A - z_B = a\cdot\left(\overline{z_A} - \overline{z_B}\right)$$
   $$z_A - z_B = a\cdot\overline{z_A - z_B}$$
   $$a = \frac{z_A - z_B}{\overline{z_A - z_B}}$$
   $$a = \frac{1-i}{\overline{1-i}}$$
   $$a = \frac{1-i}{1+i}$$
   $$a = \frac{(1-i)^2}{(1+i)\cdot(1-i)}$$
   $$a = \frac{1-2\cdot i + i^2}{1^2+1^2}$$
   $$a = \frac{1-2\cdot i - 1}{2}$$
   $$a = \frac{-2\cdot i}{2}$$
   $$a = -i$$

   En utilisant la première équation, on obtient la valeur de b :
   $$z_A = a\cdot\overline{z_A} + b$$
   $$1 = -i\cdot\overline{1} + b$$
   $$1 = -i + b$$
   $$b = 1 + i$$
   Ainsi, la reflexion S admet l'écriture complexe :
   $z' = -i\cdot\overline{z} + 1 + i$

2. L'homothétie H de centre A et de rapport -2 admet l'écriture complexe H :
   $$z' - z_A = -2\cdot(z - z_A)$$
   $$z' - 1 = -2\cdot(z-1)$$
   $$z' = -2\cdot z + 2 + 1$$
   $$z' = -2\cdot z + 3$$

3. a. La composée de similitudes est une similitude ; ainsi, la fonction f est également une similitude.

   b. La similitude f admet pour écriture complexe :
   $$\begin{aligned} z' &= f(z) \\ &= (H\circ S)(z) \\ &= H\big[S(z)\big] \\ &= H\big[-i\cdot\overline{z} + 1 + i\big] \\ &= -2\cdot\big(-i\cdot\overline{z}+1+i\big) + 3 \\ &= 2\cdot i\cdot\overline{z} - 2 - 2\cdot i + 3 \\ &= 2\cdot i\cdot\overline{z} + 1 - 2\cdot i \end{aligned}$$

4. Notons M' l'image du point M par la réflexion S

   a. L'égalité proposée devient :
   $$\overrightarrow{AM''} = -2\cdot\overrightarrow{AM}$$
   $$-2\cdot\overrightarrow{AM'} = -2\cdot\overrightarrow{AM}$$
   $$\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM}$$
   On en déduit que cette relation est vérifiée si, et seulement si, le point M est invariant par S : l'ensemble des points M est la droite (AB).

   b. Notons H le point d'intersection des droites (MM') et (AB) ; puisque M' est l'image de M par la réflexion S d'axe (AB), on a les propriétés suivantes :
   $MH = HM' \quad ; \quad (MM') \perp (AB)$
   La relation vectorielle réalisée par le point M devient :
   $$\overrightarrow{AM''} = 2\cdot\overrightarrow{AM}$$
   $$-2\cdot\overrightarrow{AM'} = 2\cdot\overrightarrow{AM}$$
   $$-2\cdot\left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM'}\right) = 2\cdot\left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}\right)$$
   $$-2\cdot\overrightarrow{AH} - 2\cdot\overrightarrow{HM'} = 2\cdot\overrightarrow{AH} + 2\cdot\overrightarrow{HM}$$
   $$-2\cdot\overrightarrow{AH} - 2\cdot\overrightarrow{AH} = 2\cdot\overrightarrow{HM} + 2\cdot\overrightarrow{HM'}$$
   $$-4\cdot\overrightarrow{AH} = 2\cdot\left(\overrightarrow{HM} + \overrightarrow{HM'}\right)$$
   $$-4\cdot\overrightarrow{AH} = 2\cdot\vec{0}$$
   $$\overrightarrow{AH} = \vec{0}$$
   Ainsi, cette relation est vérifiée si, et seulement si, les points H et A sont confondus ; on en déduit que la droite (MM') est la droite perpendiculaire à la droite (AB) passant par A.