Exercice 1:

Dans le plan orienté, on considère un triangle OAB direct et rectangle en O.
On désigne par J le milieu de [AB].
M est un point variable de la droite (Δ) perpendiculaire en A à (AB).
La perpendiculaire en O à (OM) coupe (AB) en M'.

1:Soit s la similitude de centre O telle que s(A)=B.
a)Montrer que, pour tout point M de (Δ), s(M)=M'.
b)En déduire que, lorsque M décrit (Δ), le triangle OMM' est l'image d'un triangle fixe par

Une similitude que l'on précisera.
2: a)Montrer que , pour tout point M de (Δ), le point I milieu de [MM'] est l'image de M par une similitude S de centre O dont on précisera le rapport et l'angle.
b)Soit H le projeté orthogonal de O sur (Δ).Déterminer S(H).
c)Déterminer le lieu géométrique du point I lorsque M décrit (Δ).
3: Pour tout point M de (Δ) distinct de A, on désigne par P le point tel que MAM'P est un rectangle.
Déterminer le lieu géométrique du point P lorsque M décrit "(Δ) - {A}"

Correction

1. a

(OA) et (OB) sont orthogonales avec $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$
donc s est la simiiltude de centre O , d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{OB}{OA}$.
Posons N = s(M)
Donc (OM) et (ON) sont aussi perpendiculaires. Donc, M' est sur (ON) et N est sur la droite (OM')

De plus, les droites (AM) et (BN) sont orthogonales (car l'angle de s est $\frac{\pi}{2}$) donc N est sur (AB)
N est donc sur (AB) et sur la droite perpendiculaire à (OM) , donc N = M' et on a bien s(M) = M' .

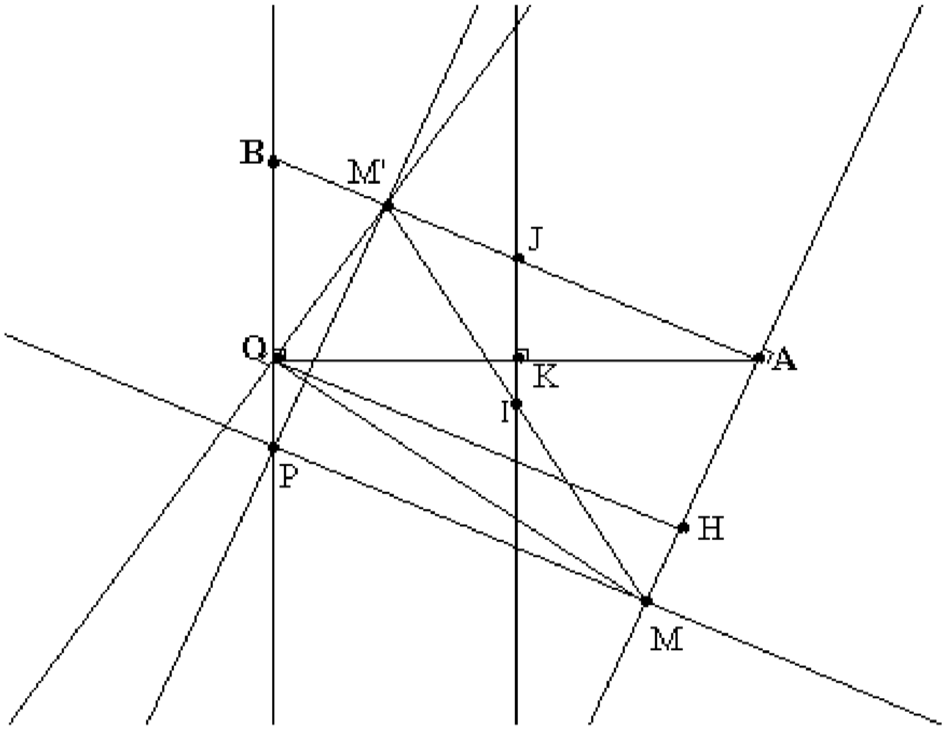
b)

puisque s(O)=O ; S(A)=B et que S(M)=M' alors le rapport de la similitude est $\frac{OB}{OA} = \frac{OM'}{OM} = \frac{BM'}{BM}$ *(1) et que le triangle OMM' est rectangle en O car l'angle de la similitude est* $\frac{\pi}{2}$

donc il existe une similitude qui transforme (OAB) en (OMM')

2. *a: on a la relation (1) et puisque J est le milieu de [AB] et I est le milieu de [MM']*
Donc il existe une similitude S'
Si S' est la similitude telle S'(O)=O ; S'(A) = J alors S'(M) = I.
L'angle de S' $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OJ}})$ *est et son rapport est* $\frac{OJ}{OA}$
b:
En particulier, si M=projeté orthogonal de O sur (Δ) *, alors le quadrilatère OMAM' est un rectangle.*
Le milieu de [MM'] est alors égal au milieu de [OA].
Donc, dans ce cas, l'image de M par S' est le milieu de [OA].
c:
Si M décrit Δ *alors S(M) décrit une droite! (image par une similitude d'une droite est une droite*
Or, S'(A)=J et S(H) = serai le milieu de [OA]
donc la droite décrite par S'(M) est la droite (JK) , où K est le milieu de [OA]
c.a.d , médiatrice de [OA]

3. *Il suffit de voir que* $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AI}$
Posons $h=h_{(A\,;2)}$ *l'homothétie de centre A et de rapport 2. Alors P = hoS'(M) ,*
hoS est aussi une similitude. L'image de Δ *par toS est une droite.*
Or : hoS'(A)=B et hoS'(H) =O
donc l'image de Δ *est la droite (OB)*
Donc, si M décrit Δ*-{A} alors P décrit la droite (OB)-{B}*



Exercice2

Le plan P est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
On désigne par S la transformation ponctuelle dans le plan qui, à tout point M d'affixe z, associe
le point M' d'affixe z' =(1 + i)z - i.

1: Montrer que S est une similitude directe de P dont on donnera les éléments caractéristiques
On notera A le point invariant de S.
Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{MM'})$, en supposant que M $\neq$ A.

2: a) Construire M' pour un point M donné.
b) Déterminer l'image de D' par S de la droite D d'équation y = x.
Construire D'.

3: a) Montrer qu'il existe un point B du plan distinct de A et un seul tel que les affixes z_0 de B et z'_0 de B' = S(B) soient liées par la relation $z_0z'_0=1$.
Mettre en place B et B'.
b) Soit A' le symétrique de A par rapport à O.
Montrer que les points A, A' , B et B' sont cocycliques

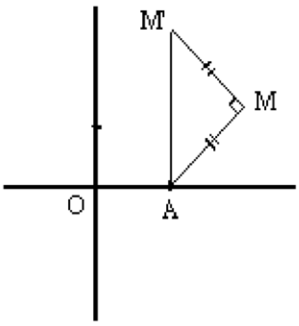
correction

1: L'application S est la similitude directe de rapport: $|1+i|=\sqrt{2}$
d'angle $arg(1+i)\equiv\frac{\pi}{4}(2\pi)$ et de centre le point A d'affixe z_1 solution de l'équation
z = (1 + i)z - i . C'est donc le point d'affixe z_1 = 1.
Si M est un point du plan distinct de A, d'affixe z, et si M' = S(M) est d'affixe z', on a:
z' = (1 + i)z - i d'où z' - z = i(z - 1) ou encore : $\frac{z'-z}{z-1}=i$.
On en déduit qu'un argument de ce nombre complexe est:

$$arg(\frac{z'-z}{z-1})\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)$$

Donc une mesure de l'angle demandé est $\frac{\pi}{2}$

2: a) On peut voir que la relation z'-z=i(z-i) implique aussi que le triangle AMM' est rectangle en M isocèle et direct.



D'où le construction de M' à partir de M.
b) L'image de D par S est une droite D'.
Comme O et C d'affixe (1 + i) sont sur D, il suffit de connaitre les images de O et C par S pour connaitre D'.
Or, S(O) a pour affixe -i et S(C) a pour affixe i (simple calcul)
On en déduit que D' = T(D) est la droite des ordonnées.

3: a) Il est demandé de déterminer l'ensemble des points M tels que $zz' = 1$.

Ceci conduit à l'équation, en reprenant la défintion liant z' à z:

$z[(1 + i)z - i] = 1$ ou encore $z^2(1 + i) - iz - 1 = 0$ ou encore $(z - 1)[z(1 + i) + 1] = 0$.

Le point cherché B doit être distinct de A donc son affixe est distincte de 1.

On a donc: $z(1 + i) + 1 = 0$ ce qui donne :

$$z = \frac{-1}{1+i} = \frac{i-1}{2}.$$

D'où l'existence et l'unicité du point B.

Le point B a donc pour affixe $\frac{i-1}{2}$ et $B' = S(B)$ pour affixe $-(1 + i)$.

b) C'est un application de la question 2:

Le triangle ABB' est rectangle en B.

Comme A' a pour cordonnées (-1 ; 0), on remarque que AA'B' est rectangle en A'.

Les points A, A' , B et B' sont donc sur le cercle de diamètre [AB'].

Exercice3

dans le plan orienté , une unité étant choise, on considère un rectangle ABCD tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$;$AB=\sqrt{2}$ et $AD=1$

I désigne le milieu de [AB].

Partie A:

Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que $MD^2 - MB^2 = 1$.

1: Vérifier que les points C et I appartiennent à (E).

2: a) Déterminer et construire (E).

b) En déduire que les droites (BD) et (CI) sont perpendiculaires.

Partie B:

Le plan est rapporté au repère orthonormé

$$(A\ ;\vec{u}\ ;\vec{v}) \text{ avec } \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB} \text{ et } \vec{v} = \overrightarrow{AD}$$

direct

Soit S une similitude directe qui, au point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que:

$z' = az + b$, où a et b sont des nombres complexes avec a non nul.

1: Déterminer les nombres complexes a et b pour que $S(D) = C$ et $S(C) = B$.

2: Soit T la similitude directe qui, au point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que:

$$z' = -\frac{i\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$$

Déterminer le rapport et l'angle de T.

3: Montrer que la similitude T transforme B en I.

4: En déduire une autre justification de l'orthogonalité des droites (BD) et (CI).

5: Montrer que le centre W de la similitude T est le point d'intersection des droites (BD) et (CI).

Correction

Partie A:

1: On remarque que AB = CD = $\sqrt{2}$ et AD = BC = 1.
Donc , $CD^2 - CB^2 = 2 - 1 = 1$: C appartient bien à (E)
De même, I étant le milieu de [AB] , on a:
$AI = BI = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $DI^2 = AD^2 + AI^2 = 1 + 1/4 = 5/4$
donc: $DI^2 - BI^2 = 5/4 - 1/4 = 1$
I appartient aussi à (E).

2: a)
$$\begin{aligned} MD^2 - MB^2 &= (\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB}) \\ &= 2\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{MG} \end{aligned}$$
où G est le milieu de [BD]

D 'après le 2ème théorème de la médiane
La relation $MD^2 - MB^2 = 1$ s'écrit alors:
$$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{MG} = \frac{1}{2}$$
L'ensemble (E) est donc un droite perpendiculaire à (BD).
Comme C et I sont dans (E), cette droite est la droite (CI).
b) Voir au-dessus

Partie B:

Les coordonnées des points sont:
A(0 ;0) , B($\sqrt{2}$; 0) , D(0 ; 1) C($\sqrt{2}$; 1)

1: D a pour affixe i , C pour affixe $\sqrt{2} + i$, et B pour affixe $\sqrt{2}$.
On veut donc: $\begin{cases} \sqrt{2} + i = a + ib \\ \sqrt{2} = a(\sqrt{2} + i) + b \end{cases}$

D'où : $a = -i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{2}}{2} + i$ (si j 'ai pas commis une erreur de calcul)

2: On remarque que T = S.
L'expression "complexe" de S montre que son rapport est $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et que son angle est $-\pi/2$

3: I étant le milieu de [AB], l'affixe de I est : $\frac{\sqrt{2}}{2}$
Il suffit alors de vérifier que l'expression complexe de T montre bien que T(B) = I.
Simple calcul!

4: On a : S(D) = C et S(B) = I
L'image d'une droite par une similitude est une droite, donc l'image par T de la droite (BD) est la droite (CI) . Comme l'angle de T est $-\pi/2$, on en déduit que ces deux droites sont bien perpendiculaires.

5: A faire sans calcul.